Bemerkungen:

- Bezeichnet man die Seite a - wie üblich - als *Gegenkathete* und die Seite b als *Ankathete* zu α, so ergeben sich folgende *Merkformeln* für die trigonometrischen Funktionen:

$$\boxed{\sin\alpha := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}\,,\quad \boxed{\cos\alpha := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}}\,,$$

$$\boxed{\tan\alpha := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}}\,,\quad \boxed{\cot\alpha := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}}$$

- Weiterhin erhält man durch Einsetzen: $\boxed{\tan\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\,,\quad \boxed{\cot\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}}\,.$

- Bezüglich des *Wertebereichs* der trigonometrischen Funktionen folgt für $\alpha \in [0, 90°]$ [1]:

$$\sin\alpha\,,\ \cos\alpha \in [0,1] \ \text{ sowie } \ \tan\alpha\,,\ \cot\alpha \in [0,\infty)\,.$$

- Verwendet man anstelle des Winkelgradmaßes α [°] das *Bogenmaß* x, so gilt:

$$\alpha \in [0, 90°] \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\,0\,,\frac{\pi}{2}\,\right]\,.$$

Mittels elementargeometrischer Betrachtungen erhält man dann unter Verwendung des Symbols ∞ für „Unendlich" folgende *Werte* für *sin, cos, tan* und *cot* zu den folgenden speziellen im Bogenmaß angegebenen Winkeln x :

Winkel x	**0**	**π/6**	**π/4**	**π/3**	**π/2**
sin x	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos x	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
cot x	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

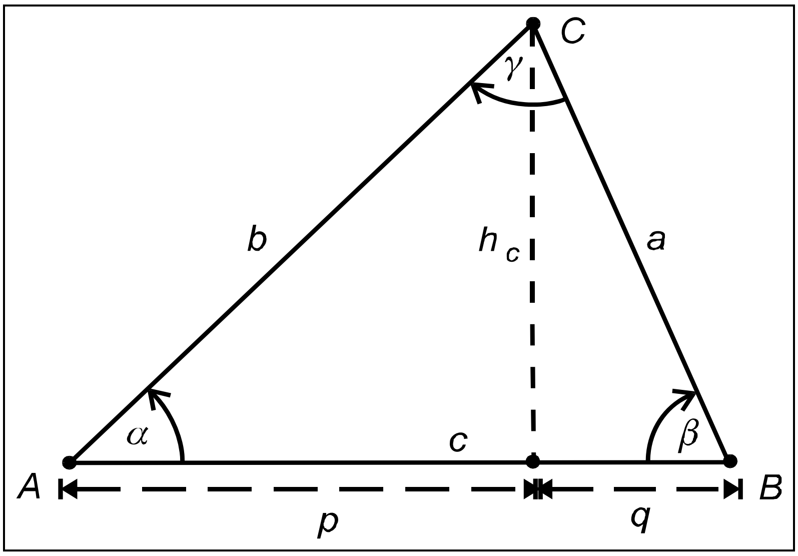
Trigonometrische Sätze im allgemeinen Dreieck

Es sei $\Delta\,ABC$ ein beliebiges Dreieck mit Seitenlängen a,b,c und Winkeln α,β,γ. Dann gelten die folgenden allgemeinen Sätze (siehe dazu die Skizze):

[1] Wir verwenden dabei die *Intervallschreibweise* $[a,b] = \{\, x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x \le b \,\}$ für gegebene reelle Zahlen $a,b \in \boldsymbol{R}$ sowie $[a,\infty) = \{\, x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x \,\}$ im Fall der nach oben unbeschränkten Menge.

Satz	**Formel**
Sinussatz	$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
Kosinussatz	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b\,c \cdot \cos\alpha$

Skizze:



Bemerkungen:

- Der *Sinussatz* lässt sich vorteilhaft anwenden, wenn im Dreieck $\Delta\, ABC$ gegeben sind
  - *zwei Seiten* sowie *ein Winkel*, welcher einer der Seiten gegenüberliegt (*SSW*) oder
  - *eine Seite* und *zwei Winkel* (*WSW* bzw. *SWW*) .
- Der *Kosinussatz* kann vorteilhaft angewendet werden, wenn im Dreieck $\Delta\, ABC$ gegeben sind
  - alle *drei Seiten* (*SSS*) oder
  - *zwei Seiten* und der von den beiden Seiten eingeschlossene *Winkel* (*SWS*) .

Produkte mit Vektoren

Im Bereich der *Produktbildung* mit Vektoren hat man im Wesentlichen drei Möglichkeiten. Während wir das *skalare Vielfache* im Zusammenhang mit der Einführung des Begriffes des Vektorraumes bereits kennengelernt haben, sind die beiden anderen Produkte neu. Es handelt sich um das *Skalar*- und um das *Vektorprodukt.* Man beachte hierbei, welche Objekte man „reinsteckt“ und welche man „herausbekommt“.

Produkte

Skalares Vielfaches	**Skalarprodukt**	**Vektorprodukt** (nur $\boldsymbol{R}^3$)
Skalar × Vektor = Vektor	Vektor × Vektor = Skalar	Vektor × Vektor = Vektor

Hier nun die Definitionen der beiden „Neuen“:

Das Skalarprodukt	
Definition:	Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$ zwei Vektoren, dann heißt $\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} := \vec{a}^T \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}$ das Skalarprodukt (abgekürzt: *SP*) von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Rechenregeln:	Aufgrund des Rückgriffs auf die Matrizenmultiplikation gelten für das SP viele Rechenregeln. Insbesondere: (i) $\vec{a} \bullet \left(\lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c} \right) = \lambda \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b}) + \mu \cdot (\vec{a} \bullet \vec{c})$ für alle $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ (*Linearität in der 2. Komponente*) und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \boldsymbol{R}^n$, (ii) $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{R}^n$, (*Symmetrie*) (iii) $\vec{a} \bullet \vec{a} \geq 0$ für alle $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^n$ und $\vec{a} \bullet \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$. (*positive Definitheit*)
Einführung einer Norm:	Mit Hilfe des SP lässt sich auch (s. Satz des Pythagoras) die *Länge* $\lVert \vec{a} \rVert$ eines Vektors $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^n$ - genannt die *Norm* - messen. Dazu setzt man $\boxed{\lVert \vec{a} \rVert := \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$. Dann hat der *Betrag* bzw. die *Norm* $\lVert \vec{a} \rVert$ von $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^n$ folgende Eigenschaften: (i) $\boxed{\lVert \vec{a} \rVert \geq 0}$ für alle $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^n$ und $\boxed{\lVert \vec{a} \rVert = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}}$ (*eindeutige Charakterisierung des Nullvektors*) , (ii) $\boxed{\lVert \lambda \cdot \vec{a} \rVert = \lvert \lambda \rvert \cdot \lVert \vec{a} \rVert}$ für alle $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^n$ (*Homogenität*) ,

	(iii) $\boxed{\left\| \vec{a}+\vec{b} \right\| \le \left\| \vec{a} \right\| + \left\| \vec{b} \right\|}$ für alle $\vec{a},\vec{b} \in \boldsymbol{R}^n$ (*Dreiecksungleichung*) . Beachte also, dass für $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^n$ gilt: $\boxed{\vec{a} \bullet \vec{a} = \left\| \vec{a} \right\|^2}$.
Geometrische Deutung des SP:	Seien $\vec{a},\vec{b} \in \boldsymbol{R}^n \setminus \left\{ \vec{0} \right\}$ und $\varphi = \measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ der von beiden Vektoren eingeschlossene Winkel mit $\varphi \in [0, \pi]$. Dann gilt für das SP : $\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = \left\| \vec{a} \right\| \cdot \left\| \vec{b} \right\| \cdot \cos \varphi}$. Auf diese Weise gelangt man zur Beschreibung der *Orthogonalität* zweier Vektoren mittels des SP . Es gilt: $\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{0} \;\vee\; \vec{b} = \vec{0} \;\vee\; \varphi = \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; \vec{a} \bullet \vec{b} = 0}$.

<u>Bemerkungen</u>:

- Zur Bezeichung der Länge (Norm) eines Vektors $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^n$ werden häufig auch kleine lateinische Buchstaben, entsprechend der Bezeichung des zugehörigen Vektors, verwendet – also z.B. a für $\left\| \vec{a} \right\|$ oder b für $\left\| \vec{b} \right\|$ usw. Dann gilt beispielsweise:

  $\boxed{\vec{a} \bullet \vec{a} = \left\| \vec{a} \right\|^2 = a^2}$ mit $\boxed{\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0}$ sowie $\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi}$

- Die *geometrische Formel* für das SP lässt sich – zumindest in den Fällen $\boldsymbol{R}^2$ und $\boldsymbol{R}^3$ – aus dem *Kosinussatz* der Trigonometrie (siehe dazu den „Anhang: Trigonometrische Funktionen“ im Skript, S. III / IV) und den Rechenregeln für das SP herleiten. Dazu betrachte man den Differenzvektor $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ in dem durch die Vektoren $\vec{a},\vec{b} \in \boldsymbol{R}^n \setminus \left\{ \vec{0} \right\}$ aufgespannten Dreieck.
- Offensichtlich dient das SP neben der *Längenmessung* von Vektoren (im Sinne einer *Norm*) auch der *Winkelmessung* zwischen zwei Vektoren $\vec{a},\vec{b} \in \boldsymbol{R}^n \setminus \left\{ \vec{0} \right\}$. Dies sieht man, wenn man die geometrische Formel $\vec{a} \bullet \vec{b} = \left\| \vec{a} \right\| \cdot \left\| \vec{b} \right\| \cdot \cos \varphi$ entsprechend umstellt zu:

  $$\boxed{\varphi = \measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left\| \vec{a} \right\| \cdot \left\| \vec{b} \right\|}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{a \cdot b}\right)} .$$

- Aus der geometrischen Formel des SP folgt die sogenannte *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung* : $\boxed{\left| \vec{a} \bullet \vec{b} \right| \le \left\| \vec{a} \right\| \cdot \left\| \vec{b} \right\| = a \cdot b}$ mit „=“ genau in den Fällen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$.
- Sind $\vec{a},\vec{b} \in \boldsymbol{R}^n \setminus \left\{ \vec{0} \right\}$ mit $a = \left\| \vec{a} \right\| = 1$ – $\vec{a}$ ist also ein sogenannter *Einheitvektor* –, dann beschreibt die Zahl $\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = \left\| \vec{b} \right\| \cdot \cos\varphi = b \cdot \cos\varphi}$ die *Projektion von* $\vec{b}$ *auf* $\vec{a}$.