<u>Bemerkungen</u>:

- Die Linearkombination $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ wird auch *triviale Linearkombination des Nullvektors* genannt.
- Ist $\vec{b} \in Lin\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \right)$, so sind die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ automatisch *l.a.* Sind umgekehrt die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *l.u.*, so auch die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1}$. Anders formuliert:

  Jede Obermenge einer Menge linear abhängiger Vektoren ist wieder linear abhängig, jede Untermenge linear unabhängiger Vektoren ist wieder linear unabhängig.
- Es gilt für das n-tupel $\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \right)$ von Vektoren $\vec{a}_i \in V$ $(1 \le i \le n)$:

  $\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \right)$ ist Basis von $V \Leftrightarrow \left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \right)$ ist *maximale l.u.* Menge in $V \Leftrightarrow$
  $\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \right)$ ist *minimales Erzeugendensystem* von V.
- In $V = \boldsymbol{R}^n$ bildet $\left(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \right)$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, ist also eine Basis (genannt die *kanonische Basis*).
- Für die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ gilt (Test auf lineare Unabhängigkeit)

  $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sind *l.u.* $\Leftrightarrow$ Für die Lösungsmenge $\boldsymbol{L}$ des LGS $(*)$ $A \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ mit der Matrix $A = \left(\vec{a}_1 \ \ldots \ \vec{a}_n \right) \in M_{m,n}\ (\boldsymbol{K})$ gilt: $\boldsymbol{L} = \{ \vec{0} \}$.
- Ist speziell $\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \right)$ eine *Basis*, so ist $A = \left(\vec{a}_1 \ \ldots \ \vec{a}_n \right)$ eine quadratische Matrix und *invertierbar*.

Zum Bogenmaß und Gradmaß

Der Winkelmessung eines Winkels (oder Winkelfeldes) $\mathcal{W} = \measuredangle QSR$ mit Scheitelpunkt S (siehe nachfolgende Skizze) im *Gradmaß* $\alpha\,[°]$ liegt die Einteilung der geschlossenen Kreislinie K des sogenannten *Einheitskreises* mit Mittelpunkt S und Radius $r = 1$ in 360 gleich große Teile zugrunde. Jedem dieser 360 Kreislinienteile entspricht dann das Gradmaß $1°$ (lies: „*1 Grad*“). Verfeinerungen der Unterteilung sind $1° = 60'$ (lies: „*60 Minuten*“) und $1' = 60''$ (lies: „*60 Sekunden*“). Damit gilt insbesondere: $1° = 3600''$.

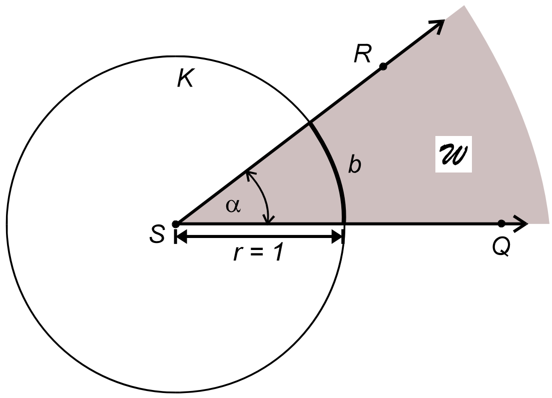
Die Winkelmessung ist eng mit der von den Babyloniern entwickelten *Zeitrechnung* verbunden und verweist auf das von ihnen verwendete Hexagesimalsystem.

<u>*Bemerkungen:*</u>

- Das *Gradmaß* $\alpha\,[°]$ des Winkelfeldes $\mathcal{W}$ beschreibt also das Maß des anteiligen Kreisbogens von K – in Bezug auf $360°$ als Maß für die Vollkreislinie –, der von dem Winkelfeld $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ aus K ausgeschnitten wird.
- Das dimensionslose *Bogenmaß* *arc* $(\mathcal{W})$ des Winkelfeldes $\mathcal{W}$ wird eingeführt als Länge b des anteiligen Kreisbogenstücks von K, der im Winkelfeld $\mathcal{W}$ gelegen ist, nach der Formel: $\boxed{x = arc(\mathcal{W}) := b}$.

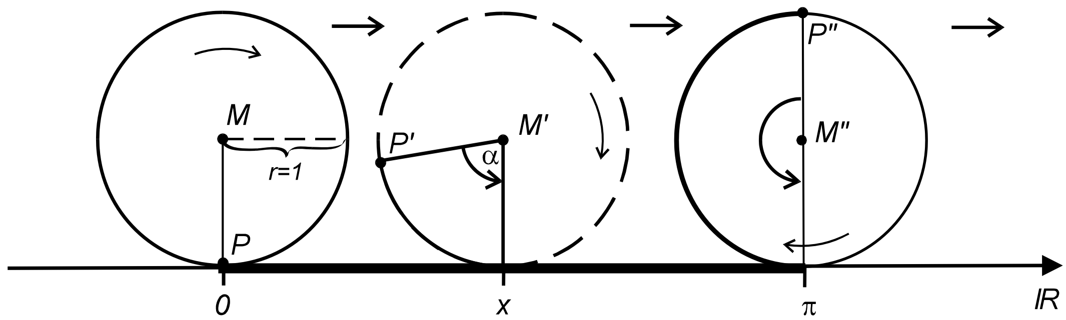
- Auf dem Taschenrechner kennzeichnet die Taste / Einstellung *DEG* die Messung eines Winkels in Grad (*DEG* für engl. *degree*). Dem gegenüber befindet sich zur Kennzeichung der Winkelmessung mittels Bogenmaß auf dem Taschenrechner die Taste / Einstellung *RAD* für *radiant*.

Skizze zum Bogenmaß:



Anschaulich erhält man die *Bogenlänge* eines Kreisbogens bzw. Kreisbogenstücks auf dem Einheitskreis K durch Abrollen von K auf einer horizontalen Geraden. Eine näherungsweise zeichnerische Konstruktion der Bogenlänge des halben Kreisumfangs - *„Abwicklung des Kreises“* genannt - liefert die Ende des 17. Jh. entwickelte sogenannte *Kochanski-Konstruktion*. Schließlich beachte man, dass mit π (sprich: *„Pi“*) speziell die *Bogenlänge der „halben“ Vollkreislinie* K bezeichnet wird.

Skizze:



Ursprünglich bezeichnet die Zahl π das Verhältnis von Umfang u zum Durchmesser d eines (beliebigen) Kreises K_r mit gegebenem Radius $r>0$ - also: $\boxed{\pi = \frac{u}{d}}$. Dabei gilt für den *Umfang* u und den *Flächeninhalt* F von K_r unter Rückgriff auf die Bogenlänge der geschlossenen Kreislinie allgemein: $\boxed{u = 2\pi \cdot r \quad , \quad F = \pi \cdot r^2}$.

Wir werden im Folgenden zunächst das *Gradmaß* verwenden.

Die Umrechnungsformeln zwischen Gradmaß $\alpha\,[°]$ und Bogenmaß $x = arc\,(\mathcal{W})$ eines Winkelfeldes $\mathcal{W}$ lauten:

$$\boxed{x = arc(\mathcal{W}) = \frac{\pi}{180°}\cdot\alpha[°]} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\alpha[°] = \frac{180°}{\pi}\cdot x} \quad .$$

Die folgende Tabelle enthält einige „charakteristische“ Werte im Bogen- und Gradmaß:

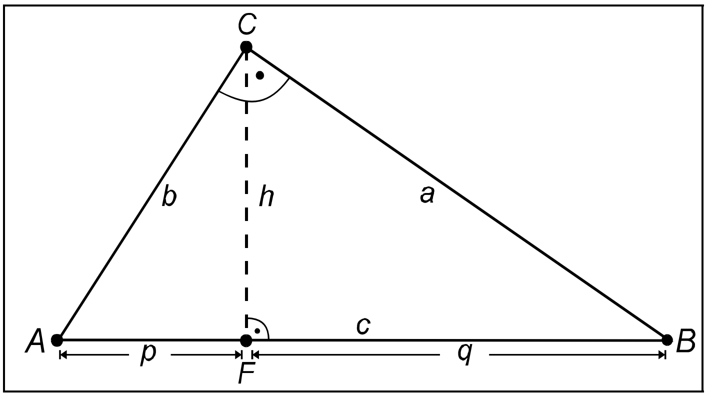
$\alpha\,[°]$	$360°$	$270°$	$180°$	$90°$	$60°$	$45°$	$36°$	$30°$	$22{,}5°$
$x = arc\,(\alpha)$	2π	$\frac{3}{2}\pi$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$

$\alpha\,[°]$	$20°$	$18°$	$15°$	$12°$	$10°$	$9°$	$6°$	…	$1°$
$x = arc\,(\alpha)$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{15}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{30}$	…	$\frac{\pi}{180}$

Bemerkung:
Im Bereich der *Vermessungstechnik*, speziell der *Geodäsie*, greift man auch auf *Neugrad* zurück. Dabei entspricht der Einheit $1\ gon$ der 100. Teil eines rechten Winkels. Der Vollwinkel misst dann $400\ gon$. Wir werden zur Angabe von $\arg z$ jedoch nebeneinander die beiden Varianten (*Alt*-)*Grad* und *Bogenmaß* verwenden.

Sätze im rechtwinkligen Dreieck

Gegeben sei im Folgenden das rechtwinklige Dreieck ΔABC mit $\gamma = 90°$. Dann heißt die Seite c die *Hypotenuse*, die Seiten a und b heißen die *Katheten* des Dreiecks ΔABC .
Skizze:



Ist h die *Höhe* von C auf AB mit Höhenfußpunkt $F \in \overline{AB}$, so heißen die beiden durch F entstehenden Teile p und q von c die durch h erzeugten *Hypotenusenabschnitte*.

Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC gelten nun die folgenden (klassischen) Sätze:

Satz	***Formel***
Höhensatz des Euklid	$h^2 = p \cdot q \quad (\gamma = \frac{\pi}{2})$
Kathetensatz des Euklid	$a^2 = c \cdot q \;, \quad b^2 = c \cdot p \quad (\gamma = \frac{\pi}{2})$
Satz des Pythagoras	$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\gamma = \frac{\pi}{2})$

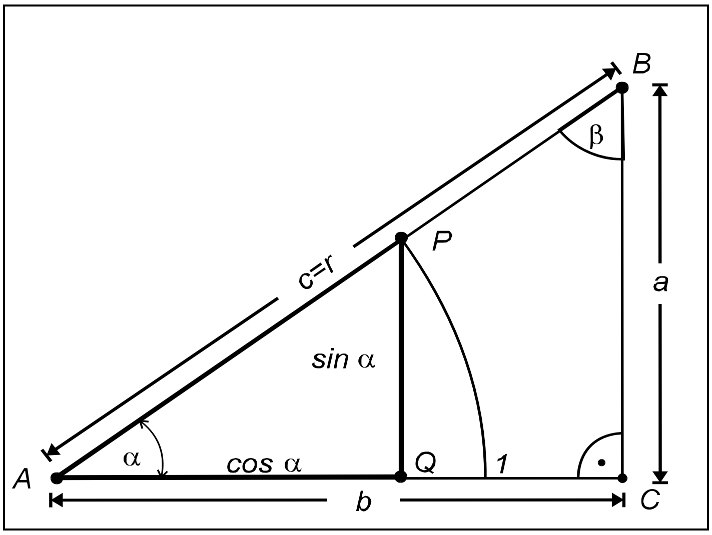
Die trigonometrischen Funktionen im Dreieck

Sei $\Delta\, ABC$ ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90\,°$, *Hypotenuse* $c = r$, *Katheten* a und b sowie den *komplementären Winkeln* α und β, für welche wegen der Winkelsumme im Dreieck gilt: $\alpha + \beta = 180\,° - \gamma = 90\,°$ und damit für β: $\beta = 90\,° - \alpha$.

Im Dreieck $\Delta\, ABC$ lassen sich nun die *trigonometrischen Funktionen*, wie folgt, einführen (s. Skizze):

$\boxed{\sin\alpha := \frac{a}{r}}$, $\boxed{\cos\alpha := \frac{b}{r}}$, $\boxed{\tan\alpha := \frac{a}{b}}$ und $\boxed{\cot\alpha := \frac{b}{a}}$

<u>Skizze:</u>



Unter Beachtung der Definition gilt dann für den Komplementärwinkel β zu α:

$\boxed{\sin\beta = \frac{b}{r} = \cos\alpha}$ sowie $\boxed{\cos\beta = \frac{a}{r} = \sin\alpha}$

Daraus erklärt sich die Bezeichnung *Cosinus* als Abkürzung für *„Sinus complementarii"* (= Sinus des Komplementärwinkels).