- *Cramer* lässt sich nur auf *quadratische* LGSe anwenden, wobei $det\,A \neq 0$ vorausgesetzt sein muss.
- *Gauß* funktioniert demgegenüber immer !!!
- *Cramer* wird schnell sehr arbeitsaufwendig, denn für die Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ eines LGS der Form $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ und $\vec{b} \in \boldsymbol{R}^n$ muss man $n+1$ Determinanten des Formats $(n \times n)$ berechnen.
- *Gauß* läuft demgegenüber unter Benutzung relativ einfacher Rechenregeln durch, ist also recht übersichtlich.
- Mittels *Cramer* ist die gezielte Berechnung einer ganz bestimmten Komponente x_i der Lösung $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^n$ möglich, ohne die restlichen Komponenten x_k für $k \neq i$ überhaupt kennen zu müssen.
- Im Gegensatz dazu liefert *Gauß* immer nur die Lösung in ihrer Gesamtheit.

Vektorräume, Untervektorräume und affine Teilräume

Das eigentliche Standardbeispiel eines Vektorraumes ist der R^n als Menge aller $(n \times 1)$ – Matrizen (*Spaltenvektoren*) samt *Vektoraddition* und *skalarem Vielfachen*, definiert durch:

1. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n \Rightarrow \boxed{\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}} \in \boldsymbol{R}^n$ sowie

2. $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n \Rightarrow \boxed{\lambda \cdot \vec{x} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}} \in \boldsymbol{R}^n$.

Ausgehend von den in $\boldsymbol{R}^n$ bekannten Rechengesetzen bzw. -regeln kann man verallgemeinernd umgekehrt diese Regeln als *definierende Struktur* eines Raumes vorgeben, dessen Elemente - *Vektoren* genannt - mittels einer Vektoraddition und einer skalaren Multiplikation miteinander ebenso „verknüpft" werden können, wie man es vom Vektorraum $\boldsymbol{R}^n$ kennt. So erhält man den allgemeinen Begriff des *Vektorraumes*.

Gesetze (Rechenregeln) des reellen / komplexen Vektorraumes	
Vorgaben:	Sei $\boldsymbol{K}$ ein (Zahlen-)Körper (z.B. $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}$ oder $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$). Auf einer Menge $V \neq \emptyset$ von Objekten seien 2 Operationen definiert: (i) $+ : V \times V \to V$ (*Vektorraumaddition*), (ii) $\cdot_K : \boldsymbol{K} \times V \to V$ (*skalare Multiplikation*).

	Das Tripel $(V, +, \cdot_K)$ heißt ein ***K**-Vektorraum*, wenn folgende Gesetze bzw. Rechenregeln gelten:
Gesetze der Addition:	(1) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ für alle $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$ (*Assoziativität*) (2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ für alle $\vec{a},\vec{b}\in V$ (*Kommutativität*) (3) es existiert ein $\vec{0}\in V$, so dass gilt: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ für alle $\vec{a}\in V$ (*Neutrales Element*) (4) zu jedem $\vec{a}\in V$ existiert ein $-\vec{a}\in V$, so dass gilt: $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(-\vec{a}\right)+\vec{a}=\vec{0}$ (*Inverses Element*)
Gesetze der skalaren Multiplikation:	(5) $\lambda\cdot\left(\mu\cdot\vec{a}\right)=\left(\lambda\cdot\mu\right)\cdot\vec{a}=\mu\cdot\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)$ für alle $\lambda,\mu\in\boldsymbol{K}$, $\vec{a}\in V$ (*gemischtes Assoziativitätgesetz*) (6) $\lambda\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$ für alle $\lambda\in\boldsymbol{K}$, $\vec{a},\vec{b}\in V$ (7) $\left(\lambda+\mu\right)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$ für alle $\lambda,\mu\in\boldsymbol{K}$, $\vec{a}\in V$ (*Distributivgesetze*) (8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ für alle $\vec{a}\in V$ (*Gesetz der Eins*)

Bemerkungen:

- Es gibt viele Beispiele für Vektorräume. Insbesondere bildet die Menge $M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ aller $(m\times n)$- Matrizen über dem Körper $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ bzw. $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Q}$ bzw. $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ selbst einen Vektorraum über $\boldsymbol{K}$.
- Aus den Rechengesetzen für den Vektorraum folgen viele weitere, wie z.B. insbesondere:

(i) $\boxed{\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}}$ für $\lambda\in\boldsymbol{R}$ beliebig sowie (ii) $\boxed{0\cdot\vec{v}=\vec{0}}$ für $\vec{v}\in V$ beliebig.

- Später wichtige Vektorräume sind spezielle *Funktionenräume*, wie z.B. der Vektorraum der reellen *Polynome*, der *differenzierbaren Funktionen* oder auch der *linearen Abbildungen* usw.

Unter den Teilmengen eines Vektorraumes spielen besonders diejenigen eine Rolle, welche für sich selbst genommen wieder einen Vektorraum bilden.

Teilraum und affiner Teilraum	
Definition Teilraum:	Sei $(V, +, \cdot_K)$ ein ***K**-Vektorraum* zum Körper $\boldsymbol{K}$. Eine Teilmenge $U\subseteq V$ heißt ein ***Teilraum*** oder ***Unterraum*** von V, falls $(U, +, \cdot_K)$ selbst wieder ein $\boldsymbol{K}$-Vektorraum ist.

Teilraumkriterium:	$U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$ ist Teilraum von V genau dann, wenn U bezüglich der Vektoraddition und der skalaren Multiplikation *abgeschlossen* ist. D.h. es gilt: (i) $\forall\ \vec{a},\vec{b} \in V$: $\vec{a},\vec{b} \in U \ \Rightarrow\ \vec{a}+\vec{b} \in U$ und (ii) $\forall \lambda \in \boldsymbol{K}\ \forall \vec{a} \in V$: $\vec{a} \in U \ \Rightarrow\ \lambda \cdot \vec{a} \in U$.
Definition affiner Teilraum:	Sei $(V, +, \cdot_{\boldsymbol{K}})$ ein ***K**-Vektorraum* zum Körper $\boldsymbol{K}$. Eine Teilmenge $A \subseteq V$, $A \neq \emptyset$ heißt ein ***affiner Teilraum*** von V , wenn sich A darstellen läßt in der Form: $\boxed{A = \vec{a} + U}$ mit $\vec{a} \in V$ und $U \subseteq V$ Teilraum von V . $\vec{a} \in V$ heißt dann auch (ein) *Repräsentant* des affinen Teilraumes A .

<u>*Bemerkungen*</u>:

- Das Teilraumkriterium lässt sich auch zusammenfassen zu folgendem zu (i), (ii) äquivalenten einzelnen Kriterium :

$$\boxed{\forall \vec{a},\vec{b} \in V\ \forall \lambda,\mu \in \boldsymbol{K}:\ \vec{a},\vec{b} \in U \ \Rightarrow\ \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \in U} .$$

  Kurz gesagt: Man prüft, ob mit je zwei Vektoren auch jede *Linearkombination* (siehe den folgenden Abschnitt) dieser beiden Vektoren zu U gehört.

- Wegen (ii) gilt wegen $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ für $\vec{v} \in V$ beliebig: $\boxed{\vec{0} \in U}$ für *jeden* Teilraum $U \subseteq V$. Daher sollte man zuerst *immer* prüfen, ob der Nullvektor zur betrachteten Menge gehört.
- Ist $A = \vec{a} + U \subseteq V$ ein affiner Teilraum des Vektorraums V , so gilt für $\vec{v},\vec{w} \in V$ beliebig: $\boxed{\vec{v},\vec{w} \in A \ \Leftrightarrow\ \vec{v} - \vec{w} \in U}$
- Insbesondere stellt nun die Lösungsmenge $\boldsymbol{L}$ eines beliebigen linearen Gleichungssystems $(*)$ $\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$ mit $(m{\times}n)$-Matrix A und rechter Seite $\vec{b} \in \boldsymbol{R}^m$ stets einen *affinen Teilraum* des zugrunde liegenden Vektorraumes $\boldsymbol{R}^n$ dar, wobei gilt: $\boxed{\boldsymbol{L} = \vec{x}_p + \boldsymbol{L}_H}$ mit einer speziellen *partikulären* Lösung $\vec{x}_p$ des inhomogenen LGS $(*)$ und $\boldsymbol{L}_H = \mathrm{Kern}(A) = \left\{ \vec{x} \in \boldsymbol{R}^n \,\middle|\, A \cdot \vec{x} = \vec{0} \right\}$ als dem *homogenen* Lösungsteilraum.

Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensysteme und Basen

Nähert man sich der Frage einer geeigneten Darstellung der Vektoren eines gegebenen Vektorraums, so gelangt man speziell auf den Begriff einer *Basis* des Vektorraumes. Dieser Begriff hängt wiederum eng mit den Begriffen *Linearkombination*, *Erzeugendensystem* und *lineare Unabhängigkeit* bzw. *lineare Abhängigkeit* zusammen bzw. setzt diese voraus.

Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit	
Linearkombination:	Sei $V \neq \emptyset$ ein Vektorraum über einem Körper $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Q}$ oder $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$) . Sind $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n \in V$ irgendwelche (nicht notwendig verschiedene) Vektoren aus V und $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \boldsymbol{K}$ irgendwelche zugehörigen Skalare, dann heißt der Vektor $$\vec{b}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i := \lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n \in V$$ eine *Linearkombination* von $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$. Dabei heißen die Zahlen $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \boldsymbol{K}$ selbst die *Koeffizienten* der Linearkombination.
linear abhängig, linear unabhängig:	Die Vektoren $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n \in V$ heißen *linear abhängig* (*l.a.*), falls Zahlen $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \boldsymbol{K}$ existieren mit $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2>0$ ($\Leftrightarrow$ $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein λ_i) und $$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0} \; .$$ Anderenfalls heißen die Vektoren $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ *linear unabhängig* (*l.u.*) Insbesondere sind $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ *l.u.*, wenn gilt: $$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0} \;\Rightarrow\; \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0 \; .$$
Erzeugendensystem, lineare Hülle:	Das n-tupel $\left(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n\right)$ von Vektoren $\vec{a}_i \in V$ $(1 \le i \le n)$ heißt ein *Erzeugendensystem* von V , wenn für die Menge aller Linearkombinationen von $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ gilt: $$Lin\left(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n\right) := \left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i \,\middle|\, \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \boldsymbol{K}\right\}=V$$ $Lin\left(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n\right)$ heißt auch *die lineare Hülle von* $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$.
Basis eines Vektorraumes:	Das n-tupel $\left(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n\right)$ von Vektoren $\vec{a}_i \in V$ $(1 \le i \le n)$ heißt eine *Basis* von V , wenn es ein *l.u. Erzeugendensystem* ist. Dann gilt insbesondere: Jeder Vektor $\vec{b} \in V$ besitzt eine *eindeutige* Darstellung der Form $$\vec{b}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i := \lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n \; .$$