2. Dennoch gibt es auch einen gravierenden Unterschied: In den Zahlbereichen $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{C}$ folgt aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ stets $ab \neq 0$.

   Diese *Nullteilerfreiheit* ist bei den Matrizen i.a. nicht mehr erfüllt, wie das folgende Beispiel durch Nachrechnen schnell zeigt:

   $$A \cdot B = B \cdot A = O \quad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O\,, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq O \;.$$

3. Da also die Nullteilerfreiheit bei Matrizen i.a. nicht gilt, existiert auch nicht zu jeder ($n \times n$)-Matrix $A \neq O$ eine *inverse Matrix* A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Falls doch, dann findet man diese durch den (etwas modifizierten) *erweiterten Gaußschen Algorithmus*:

   Dazu geht man von der erweiterten Matrix $(A \mid E)$ aus, in welcher rechts die Einheitsmatrix E_n steht. Dadurch löst man simultan die n LGSe $A \cdot \vec{x} = \vec{e}_i$ mit den *kanonischen Einheitsvektoren* $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit einer 1 in der *i-ten* Zeile und 0 sonst ($i = 1, \ldots, n$) . Mittels der elementaren Zeilenoperationen des Gaußalgorithmus wird $(A \mid E)$ so weit transformiert, bis man auf der linken Seite die spezielle Zeilenstufenform der *Einheitsmatrix* erhält, also: $(A' \mid B) = (E \mid B)$. Dann folgt: $B = A^{-1}$, denn:

   Bezeichnet $\vec{b}_i$ den *i-ten* Spaltenvektor von B , so erhält man für $i = 1, \ldots, n$ aufgrund der Umformung der erweiterten Koeffizientenmatrix die Gleichungen:

   $$(*) \;\; A \cdot \vec{x} = \vec{e}_i \;\Leftrightarrow\; E \cdot \vec{x} = \vec{x} = \vec{b}_i \;\; \text{(eingesetzt in } (*)\text{)} \;\Leftrightarrow\; A \cdot \vec{b}_i = \vec{e}_i \;.$$

4. Die Frage, wann eine quadratische Matrix A *invertierbar* ist, d.h. eine inverse Matrix A^{-1} besitzt, lässt sich auch schnell direkt mittels *Determinantenberechnung* lösen.

Die Determinante einer quadratischen Matrix

Man kann jeder *quadratischen* ($n \times n$)-Matrix A eine reelle Zahl zuordnen, die sogenannte *Determinante* $\det A$. Um $\det A$ zu definieren, gehen wir im folgenden *induktiv* vor.

Determinantenberechnung	
Der Fall $n = 1$:	Sei A eine (1×1)-Matrix, also: $A = (a)$ mit $a \in \boldsymbol{R}$. Dann gelte: $\det A := a$.
Laplacescher Entwicklungssatz zur Rückführung des Falles n auf den Fall $n-1$:	Sei A eine reelle ($n \times n$)-Matrix, also: $A = (a_{ik})_{1 \le i,k \le n}$ mit $a_{ik} \in \boldsymbol{R}$ ($i = 1 \le i,k \le n$) . Weiterhin betrachten wir die sogenannten „Streich"-Matrizen A'_{ik} vom Format $(n-1) \times (n-1)$, die aus A durch Streichen der *i-ten* Zeile und *k-ten* Spalte entstehen. a) Ist $\vec{a}_i^{\,T} = (a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \ldots \;\; a_{in})$ der *i-te* Zeilenvektor von A ,

$1 \le i \le n$, so gilt: $\quad det\, A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot det\, A'_{ik}$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile = Summation über Spaltenindex k).

b) Ist dagegen $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ der *k-te* Spaltenvektor von A,

$1 \le k \le n$, so gilt: $\quad det\, A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot det\, A'_{ik}$

(Entwicklung nach der k-ten Spalte = Summation über Zeilenindex i).

Spezialfall $n = 2$ *:*

Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ eine (2×2)-Matrix, dann erhalten wir durch Entwicklung nach der *1. Zeile*:

$$det\, A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a \cdot det\, A'_{11} + (-1)^{1+2} \cdot b \cdot det\, A'_{12}$$

$$= a \cdot det\,(d) - b \cdot det\,(c) \; .$$

Also: $\quad det\, A = ad - bc \; .$

Spezialfall $n = 3$ *:*

Ist $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ mit $a,b,\ldots,i \in \mathbf{R}$ eine (3×3)-Matrix, dann erhalten wir durch Entwicklung nach der *1. Zeile*:

$$det\, A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a \cdot det\, A'_{11} + (-1)^{1+2} \cdot b \cdot det\, A'_{12}$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot c \cdot det\, A'_{13} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \; .$$

Also: $\quad det\, A = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi \; .$

<u>Bemerkungen</u>:

- Man kann zeigen, dass es für die Berechnung einer Determinante nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz egal ist, nach welcher Zeile bzw. Spalte man entwickelt. Das Ergebnis ist in allen Fällen dasselbe.
- Daher beachte folgende *Merkregel*, welche oft viel Rechenarbeit ersparen hilft:

Entwickle stets nach der Spalte bzw. Zeile mit den meisten Nullen !!!

- Man nennt den Fall $n = 3$ auch die *Regel nach Sarrus.* Gemeinsam mit dem Fall $n = 2$ lässt sich die Determinantenberechnungsformel dann visuell als sogenannte *„Latten-“* oder *„Jägerzaunregel“* darstellen:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$n = 2$ $\qquad$ $n = 3$

Man beachte hierbei:

Die Produkte entlang der *durchgezogenen* Pfeile (also von links oben nach rechts unten) werden *addiert*, die Produkte entlang der *durchbrochenen* Pfeile (also von links unten oben nach rechts oben) werden *subtrahiert*.

- Für die Fälle $n \geq 4$ ist die Jägerzaunregel nicht mehr gültig. Hier kann man die Determinante nur noch allein unter Anwendung des *Laplaceschen Entwicklungssatzes* berechnen!!
- Die Determinante $det\ A$ ist ein gutes Hilfsmittel, um die Frage nach der *Invertierbarkeit einer Matrix* A zu entscheiden:

$$\boxed{A \text{ ist invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad det\ A \neq 0}\ .$$

Die Matrix A heißt in diesem Fall auch *regulär*, und es gilt speziell: $\boxed{det\ A^{-1} = \dfrac{1}{det\ A}}$.

- Bei der Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes kann man im Zusammenhang mit den *Vorzeichen* in der Summe der Produkte aus den Koeffizienten $a_{i\,k}$ und den Determinanten der zugehörigen Streichmatrizen $A'_{i\,k}$ vom Format $(n-1) \times (n-1)$ der entsprechenden Zeile / Spalte, nach der entwickelt werden soll, auf folgendes *Vorzeichenschema* (Schachbrettmuster) zurückgreifen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & + \end{pmatrix}$$

In der Determinantenrechnung lassen sich einige *Rechenregeln* anwenden, welche die Berechnung der Determinante erleichtern*:*

Eigenschaften der Determinanten	
Transponieren:	Ist A eine $(n \times n)$-Matrix, so gilt für die transponierte Matrix A^T : $det\ (A^T) = det\ A$.
Determinantenmultiplikationssatz:	Sind A, B zwei $(n \times n)$-Matrizen, so gilt für die Matrix $C = A \cdot B$: $det\ C = det\ (A \cdot B) = det\ A \cdot det\ B$.
Dreiecksmatrizen:	Ist A eine $(n \times n)$-Matrix mit $a_{ik} = 0$ für $1 \leq i,k \leq n$ und $i > k$ (also *obere Dreiecksmatrix*), so gilt:

	$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$. Damit ist $\det A$ das *Produkt der Koeffizienten in der Hauptdiagonalen* von A . Speziell gilt für die *Einheitsmatrix* $E = E_n$: $\det E = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1$.
Wechselwirkung mit den Gaußschen Zeilen- und Spaltenoperationen:	1. Vertauschen von zwei Zeilen/Spalten von A verändert das Vorzeichen der Determinante: $\det\left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k \ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_n\right) = -\det\left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_k \ldots \vec{a}_n\right)$. 2. Multiplikation einer Zeile/Spalte mit $\lambda \in \boldsymbol{R}$ ergibt das λ-fache der Determinante: $\det\left(\vec{a}_1 \ldots \lambda \cdot \vec{a}_i \ldots \vec{a}_k \ldots \vec{a}_n\right) = \lambda \cdot \det\left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_k \ldots \vec{a}_n\right)$. 3. Addition des λ-fachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen verändert die Determinante nicht: $\det\left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_i + \lambda \cdot \vec{a}_k \ldots \vec{a}_k \ldots \vec{a}_n\right) = \det\left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_k \ldots \vec{a}_n\right)$

<u>Bemerkungen</u>:

- Aus dem Determinantenmultiplikationssatz folgt speziell:

  $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det E_n = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$ (s.o.)

- Aus dem Vorzeichenwechsel der Determinante bei Vertauschen zweier Zeilen/Spalten einer quadratischen Matrix A folgt: $\boxed{\det\left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a} \ldots \vec{a} \ldots \vec{a}_n\right) = 0}$ für $\vec{a}_i = \vec{a}_k = \vec{a}$.

- Für $\lambda \in \boldsymbol{R}$ und jede quadratische ($n \times n$)-Matrix A gilt: $\boxed{\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A}$.

- Sei $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ eine *reguläre* Matrix; d.h.: $\det A \neq 0$. Dann kann man die eindeutige Lösung des LGS $(*)$ $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{b} \in \boldsymbol{R}^n$ auch mittels der *Cramerschen Regel* unter Anwendung der Determinantenrechnung bestimmen:

  $$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \quad \text{mit} \quad B_i = \left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_{i-1}\, \vec{b}\, \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n\right) \quad (1 \le i \le n) ,$$

  wobei B_i also aus A durch Austausch der i-ten Spalte gegen den Spaltenvektor $\vec{b}$ auf der rechten Seite von $(*)$ entsteht.

- Ein Vergleich der Cramerschen Regel zur Berechnung der Lösung eines LGS mit dem Gaußschen Algorithmus zeigt: