

weils zu einem *Spaltenvektor* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ bzw. $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$, erhält man für das

LGS die kompakte Darstellung: $\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$.

(Zur Bedeutung des *Multiplikationszeichen* zwischen A und \vec{x} als sogenanntes *Matrixprodukt* siehe später!)

- Im Fall $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ heißt das LGS (*) *homogen*, anderenfalls *inhomogen*.
- Jeder konkrete Zahlenvektor \vec{x} , der das LGS (*) löst, heißt ein *Lösungsvektor*, und die Menge aller Lösungsvektoren \vec{x} bezeichnet man als den *Lösungsraum L* des LGS.
- Zur Ermittlung des Lösungsraumes L von (*) kann man anstelle der Gleichungen die sogenannte *erweiterte Systemmatrix* ($A \mid \vec{b}$) betrachten und sie folgendem Algorithmus von sogenannten *elementaren Zeilenoperationen (EZO)* unterziehen:

Gaußscher Algorithmus	
<i>Vertauschung zweier Zeilen:</i>	$(i) \leftrightarrow (k) : (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in} \mid b_i) \leftrightarrow (a_{k1} \ a_{k2} \ \dots \ a_{kn} \mid b_k)$
<i>Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$:</i>	$(i) \rightarrow \lambda \cdot (i) : (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in} \mid b_i) \rightarrow (\lambda \cdot a_{i1} \ \lambda \cdot a_{i2} \ \dots \ \lambda \cdot a_{in} \mid \lambda \cdot b_i)$
<i>Addition des Vielfachen einer zu einer anderen Zeile:</i>	$(i) \rightarrow (i) + \lambda \cdot (k) : (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in} \mid b_i) \rightarrow (a_{i1} + \lambda \cdot a_{k1} \ a_{i2} + \lambda \cdot a_{k2} \ \dots \ a_{in} + \lambda \cdot a_{kn} \mid b_i + \lambda \cdot b_k)$

Ziel der *EZO* ist es, durch schrittweises Umformen der *Systemmatrix* ($A \mid \vec{b}$) diese auf die sogenannte *Zeilen-Stufen-Form (ZSF)*, d.h. auf *obere Dreiecksgestalt*, zu bringen. Die entsprechend umgeformte Matrix ($A' \mid \vec{b}'$) hat dann die folgende Gestalt:

$$(A' \mid \vec{b}') = \left(\begin{array}{cccc|c} ***** & & & & b'_1 \\ 0 \dots 0 & ***** & & & b'_2 \\ 0 \dots 0 & 0***** & & & b'_3 \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0* \dots * & & & b'_r \\ & 0 & & & b'_{r+1} \\ & \vdots & & & \vdots \\ & 0 & & & b'_m \end{array} \right), \text{ d.h. die ersten } r \text{ Zeilen sind von der Form}$$

$$(0 \dots 0 \ a'_{ij} \ a'_{i,j+1} \ \dots \ a'_{i,n} \mid b'_i) \text{ mit } a'_{ij} \neq 0, (1 \leq i \leq r, i \leq j).$$

Dabei kann man zusätzlich sogar für den „führenden“ Koeffizienten $a'_{ij} = 1$ erzwingen.

- Das System ($A' \mid \vec{b}'$) bzw. das zugehörige LGS und das Ausgangssystem ($A \mid \vec{b}$) besitzen dann wegen der Umkehrbarkeit der vorgenommenen Zeilenoperationen (EZO) dieselbe Lösungsmenge L .

- Ausgehend von den führenden *Kopf-Einsen* in der ZSF des LGS kann man durch entsprechende Manipulationen der jeweils über einer Zeile stehenden Zeilen mittels der EZOs erreichen, dass auch oberhalb der führenden Einsen in den Zeilen Nullen auftauchen. Wir nennen das die *normierte Zeilenstufenform* (NZSF) eines LGS und sprechen dann vom *erweiterten Gaußalgorithmus* oder *Gauß-Jordan-Algorithmus*. Diese Form des Algorithmus wird speziell bei der *Invertierung einer Matrix* (siehe später!) verwendet.
- Die Zahl r der auf der linken Seite von $(A' | \vec{b}')$ verbleibenden nichttrivialen Zeilen nennt man auch den *Rang* – genauer: *Zeilenrang* $r = \text{rg}(A')$ – der Matrix A' , die Anzahl $s \geq r$ der verbleibenden nichttrivialen Zeilen in $(A' | \vec{b}')$ – in Zeichen: $s = \text{rg}(A' | \vec{b}')$ – der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix bzw. des LGS. Beide Zahlen stellen eine *Invariante* unter den EZOs dar.
- Bezüglich der Lösbarkeit des LGS (*) können wir anhand der Gestalt von $(A' | \vec{b}')$ – bzw. anhand der beiden Rangzahlen r und s – folgendes ablesen:

Mögliche Fälle für die Lösungsmenge L von (*)	
$L = \emptyset$:	$r < m$ und $b'_i \neq 0$ für mindestens ein i mit $r+1 \leq i \leq m$, d.h.: $r = \text{rg}(A') < s = \text{rg}(A' \vec{b}')$
L eindeutig:	$b'_{r+1} = b'_{r+2} = \dots = b'_m = 0$ bzw. $r = m$ und $s = r = n$: Dann haben alle Stufen die Breite 1, und die letzte Gleichung lautet: $a'_{n,n} x_n = b'_n$ mit $a'_{n,n} \neq 0$, woraus man x_n erhält. Einsetzen von x_n in die <i>vorletzte</i> Gleichung $a'_{n-1,n-1} x_{n-1} + a'_{n,n} x_n = b'_{n-1}$ mit $a'_{n-1,n-1} \neq 0$ liefert x_{n-1} . Sukzessive Fortsetzung des Einsetzungsverfahrens liefert dann eine(n) <i>eindeutig bestimmte(n) Lösung(svektor)</i> $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.
L mehrdeutig:	$b'_{r+1} = b'_{r+2} = \dots = b'_m = 0$ bzw. $r = s \leq m$ und $r < n$: Dann gibt es $n - r$ Variablen – nennen wir sie x_{t_1} bis $x_{t_{n-r}}$, welche sich frei wählen lassen, z.B. in der Form: $x_{t_1} = s, x_{t_2} = t, \dots, x_{t_{n-r}} = u$. Mit diesen $n - r$ <i>Parametern</i> s, t, u, \dots bestimmt man dann - wie im eindeutigen Fall - sukzessive die restlichen, nicht frei wählbaren x_k und erhält so <i>unendlich viele Lösung(svektoren)</i> $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Man gewinnt so die Lösungsmenge L in der sogenannten <i>parametrisierten Darstellung</i> .

- Wir werden auf die spezielle Gestalt der Lösungsmenge L für ein homogenes sowie für ein inhomogenes LGS noch einmal später unter dem Gesichtspunkt der *Vektorraumtheorie* zurückkommen.

Matrizen

- Eine (m,n) -Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ist ein rechteckiges Zahlenschema, be-

stehend aus m Zeilen und n Spalten mit *Koeffizienten* a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$). i heißt der *Zeilenindex*, j der *Spaltenindex* der Matrix A . Das *Format* der Matrix A wird in der Form $(m \times n)$ bzw. (m,n) angegeben, symbolisiert als *Zeilen- mal Spaltenanzahl*.

- Zur Bezeichnung einer Matrix ist auch folgende Kurzschreibweise üblich:

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n} \text{ bzw. nur } A = (a_{ij}).$$

- Wählt man $i = 1$, so heißt $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ auch *Zeilenvektor der Länge n* . Wählt

man entsprechend $j = 1$, so heißt $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ auch *Spaltenvektor der Länge n* .

Folgende Operationen mit Matrizen sind zulässig:

Matrixoperationen	
<i>Transponieren:</i>	<p>Ist $A = (a_{ik})$ eine (m,n)-Matrix, so ist die zu A <i>transponierte Matrix</i> $A^T = (a_{ik}^T)$ definiert durch: $a_{ik}^T := a_{ki}$.</p> <p>A^T entsteht also aus A durch Vertauschung der Zeilen und Spalten von A und ist damit eine (n,m)-Matrix.</p>
<i>skalares Vielfaches:</i>	<p>Ist $A = (a_{ik})$ eine (m,n)-Matrix und λ eine Zahl, so ist das <i>Vielfache</i> $\lambda \cdot A$ von A definiert durch: $\lambda (a_{ik}) := (\lambda \cdot a_{ik})$.</p> <p>$\lambda \cdot A$ entsteht also aus A durch komponentenweise Multiplikation mit dem <i>Skalar</i> - d.h. der Zahl - λ und ist wieder (m,n)-Matrix.</p>
<i>Addition von Matrizen:</i>	<p>Sind $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ zwei (m,n)-Matrizen, so ist die <i>Summe</i> $A + B$ definiert durch: $(a_{ik}) + (b_{ik}) := (a_{ik} + b_{ik})$.</p> <p>$A + B$ entsteht also aus A und B durch komponentenweise Addition und ist wieder eine (m,n)-Matrix.</p>
<i>Multiplikation von Matrizen:</i>	<p>Ist $A = (a_{ik})$ eine (m,n)-Matrix und $B = (b_{kj})$ eine (n,r)-Matrix, so ist das <i>Produkt</i> $C = AB = (c_{ij})$ eine (m,r)-Matrix, definiert durch:</p> $(c_{ij}) = (a_{ik}) \cdot (b_{kj}) := \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right).$ <p>AB entsteht also aus A und B durch Verknüpfen der Zeilen von A mit den Spalten von B mittels komponentenweiser Produktbildung $a_{ik} \cdot b_{kj}$ samt Summenbildung über k.</p>

Bemerkungen:

1. (i) *Transponieren* und *skalares Vielfaches* einer Matrix A gehen immer,
 - (ii) *Matrizenaddition* $A + B$ geht nur bei gleichem Matrizenformat (m,n) für A und B ,
 - (iii) *Matrizenmultiplikation* $A \cdot B$ geht nur, wenn die Anzahl n der Spalten von A mit der Anzahl n der Zeilen von B übereinstimmt (!!!). Man erhält „dimensionsmäßig“ für die Produktmatrix $A \cdot B = C$ das Format: $(m,n) \times (n,r) = (m,r)$.
2. Das Matrizenprodukt ist *nicht kommutativ*, was sich allein aus dem Format der Produkte $C = A \cdot B$ und $D = B \cdot A$ ergibt, wenn man A vom Format (m,n) und B vom Format (n,m) wählt. Aber auch im Fall *quadratischer* Matrizen ist Kommutativität nicht erfüllt.
3. Die Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ zu einem LGS ist jetzt als *Matrizenprodukt* verstehbar:

Ist $A = (a_{ij})$ die (m,n) -Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems und \vec{x} der aus den Unbekannten x_j zusammengesetzte Spaltenvektor im Sinne einer $(n,1)$ -Matrix, so erhält man durch Matrizenmultiplikation von A und \vec{x} den Spaltenvektor \vec{b} der rechten Seite des LGS im Sinne einer $(m,1)$ -Matrix.
4. Bei der Berechnung des Matrizenproduktes $C = A \cdot B$ kann man sich des sogenannten *Falk-Schemas* bedienen, bei dem man A *links* von und B *oberhalb* der Ergebnismatrix C schreibt. Das zu berechnende Matrixelement c_{ij} steht dann im Schnitt der *i-ten* Zeile von A mit der *j-ten* Spalte von B .

Im Zusammenhang mit den Matrizenoperationen gelten verschiedene *Rechenregeln*:

Rechenregeln der Matrixoperationen	
<i>Transponieren:</i>	$(A^T)^T = A, (A + B)^T = A^T + B^T, (\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T, (AB)^T = B^T \cdot A^T.$
<i>Assoziativ- und Distributivgesetze:</i>	$(AB)C = A(BC), A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC, A(\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A)B = \lambda \cdot (AB)$ usw.
<i>Neutrales Element bzgl. Addition und Multiplikation:</i>	<p>Für die <i>Nullmatrix</i> $O := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ gilt:</p> <p>$A + O = O + A = A, A \cdot O = O, O \cdot A = O.$</p> <p>Für die <i>Einheitsmatrix</i> $E := E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ gilt:</p> <p>$AE = A, EB = B.$</p>

Bemerkungen:

1. Es zeigt sich, dass hinsichtlich der Operationen Addition und Multiplikation eine gewisse Analogie zum Rechnen in den bekannten Zahlbereichen besteht:

Die *Nullmatrix* O spielt in der „Matrizenalgebra“ bzgl. Addition die Rolle der Zahl 0 in \mathbf{R} bzw. \mathbf{C} und die *Einheitsmatrix* E bzgl. der Multiplikation die Rolle der Zahl 1 .