„Im Zusammenhang mit vorstehender „Gewinn-Verlust-Rechnung“ - veranschaulicht im vorstehenden Graphen - bei den einzelnen *Zahlbereichserweiterungen* bedeutet:

- ***Wohlordnungsprinzip** in* $\boldsymbol{N}$: In jeder nicht leeren Teilmenge $A \subseteq \boldsymbol{N}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element, das sogenannte *Minimum*.
- ***Vorgänger- und Nachfolgerbeziehung** in* $\boldsymbol{Z}$: Jede *ganze Zahl* $m \in \boldsymbol{Z}$ besitzt zwei eindeutige „Nachbarn“, nämlich $m-1$ und $m+1$.
- ***Abzählbarkeit** von* $\boldsymbol{Q}$: Die *rationalen Zahlen* $x \in \boldsymbol{Q}$ lassen sich eineindeutig den natürlichen Zahlen zuordnen oder anders ausgedrückt: Alle $x \in \boldsymbol{Q}$ können so in einer Kette hintereinander aufgereiht werden (z.B. nach dem *Cantorschen Schema*), dass jede Zahl in dieser Kette ihren eindeutigen Platz findet.
- ***Vollständigkeit** von* $\boldsymbol{R}$: Jedem Punkt auf der (kontinuierlichen) Zahlengeraden entspricht eineindeutig eine reelle Zahl $x \in \boldsymbol{R}$, charakterisiert durch eine endliche oder unendliche Dezimalbruchentwicklung der Form $\boxed{x = c{,}b_1 b_2 b_3 \ldots = c + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \ldots}$ mit $c \in \boldsymbol{Z}$ und $b_i \in \{0,\ldots,9\}$.
- Zwischen den rationalen Zahlen $x = \frac{p}{q} \in \boldsymbol{Q}$ und der Form ihrer b-adischen Darstellung besteht ein enger Zusammenhang, welcher die Unterteilung des Zahlbereichs $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen in die *rationalen* und die *irrationalen* Zahlen anhand ihrer b-adischen Entwicklungen offensichtlich macht. Demnach gilt für eine beliebige reelle Zahl $x \in \boldsymbol{R}$:

  $x = \frac{p}{q} \in \boldsymbol{Q}$ (d.h. x ist *rationale* Zahl) $\Leftrightarrow$ Die b-adische Darstellung von x ist bezüglich jeder beliebigen Basis $b \in \boldsymbol{N}$, $b \geq 2$ *endlich* oder *unendlich periodisch.*

  $x \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ (d.h. x ist *irrationale* Zahl) $\Leftrightarrow$ Die b-adische Darstellung von x ist bezüglich jeder beliebigen Basis $b \in \boldsymbol{N}$, $b \geq 2$ *unendlich nicht-periodisch.*

  Man beachte dabei, dass die Menge sämtlicher endlicher und unendlicher Dezimalbrüche ***überabzählbar*** ist (Beweis mit dem *Cantorschen Diagonalverfahren*).
- *Möglichkeit der **Anordnung*** in $\boldsymbol{R}$: Je zwei *reelle Zahlen* $x,y \in \boldsymbol{R}$ lassen sich hinsichtlich ihrer Größe vergleichen. Speziell gilt für alle Zahlen $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$: $x^2 > 0$.

Rechengesetze (Körperaxiome) der reellen Zahlen

	Gesetze der Addition	**Gesetze der Multiplikation**
Assoziativgesetz:	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Kommutativgesetz:	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Existenz eines neutralen Elements:	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$

Existenz von inversen Elementen:	$x + (-x) = 0$	$x \cdot x^{-1} = 1$ für $x \neq 0$ mit $x^{-1} = 1/x$
Distributivgesetz:	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	

Satz:
Aus den Rechengesetzen folgt u.a. für beliebige reelle Zahlen $x,y,z \in \mathbf{R}$:

(i) $\boxed{x \cdot 0 = 0}$ sowie (ii) $\boxed{x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -xy\,,\,(-x) \cdot (-y) = xy}$ (*Vorzeichenregeln*) und
(iii) $\boxed{(x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \Rightarrow x \cdot y \neq 0}$ bzw. $\boxed{x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)}$ (*Nullteilerfreiheit* in $\mathbf{R}$).

Bemerkungen:

- Jeder Zahlenbereich, der die angegebenen Rechengesetze erfüllt, heißt ein *Körper*: Insbesondere sind also die Zahlbereiche $\mathbf{R}$ und $\mathbf{Q}$ Körper, $\mathbf{N}$ und $\mathbf{Z}$ hingegen *nicht*.
- Ein wichtiger Spezialfall für die Klammerrechnung als Anwendung des Distributivgesetzes sind die *Binomischen Formeln*:

1. Binom: $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot ab + b^2}$ für $a,b \in \mathbf{R}$ beliebig,

2. Binom: $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot ab + b^2}$ für $a,b \in \mathbf{R}$ beliebig,

3. Binom: $\boxed{(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2}$ für $a,b \in \mathbf{R}$ beliebig.

Rechengesetze für Brüche

Für beliebige (reelle) Zahlen $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ bzw. Terme mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ gilt:

Bruchoperation:	***Ergebnis:***
Gleichheit von Brüchen	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$
Erweitern / Kürzen	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad (c \neq 0)$
Addition / Subtraktion	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$
Multiplikation	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Division	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (c \neq 0)$

<u>Bemerkung</u>:
Bei der *Addition* und *Subtraktion* von Brüchen ist die Suche nach dem *Hauptnenner* enorm wichtig. Dieser ist i.a. das *kleinste gemeinsame Vielfache* (*kgV*) aus den Nennern der einzelnen beteiligten Brüche und kann nach folgender Methode ermittelt werden kann:

- Zerlege zunächst jeden Nenner in seine Bestandteile (*Faktorisierung*).
- Bilde dann das „Minimal"-Produkt - also das *kgV* - aus den Einzelbestandteilen der verschiedenen Nenner der beteiligten Brüche, so dass jeder von ihnen in diesem Produkt enthalten ist. Das ist der *Hauptnenner*.
- Ermittle dann aus dem Hauptnenner für jeden Bruch den *Erweiterungsterm*, mit dem dieser auf den Hauptnenner gebracht werden muss.

Polynomdivision

Im Zusammenhang mit der Vereinfachung (Kürzen) von rationalen – d.h. in Form von Quotienten dargestellten – (algebraischen) Termen spielt die sogenannte *Polynomdivision* polynomialer Terme als Verallgemeinerung der *Division mit Rest* in $\mathbb{Z}$ eine besondere Rolle. Dieses schriftliche Verfahren soll im Folgenden speziell für den Fall eines Quotienten mit einem Zähler- und einem Nennerpolynom – *rationale Funktion* genannt – vorgestellt werden.

Die Polynomdivision	
Gegeben:	Die *gebrochen rationale Funktion* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit den beiden Polynomen $p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \;, \; a_m \neq 0$ und $q(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0 \;, \; b_n \neq 0$. Dabei gelte für $grad\, p = m$ und $grad\, q = n$: $m \geq n$.
Ziel:	Suche für $f(x)$ eine Darstellung der Form: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ mit $s(x) = c_s \cdot x^s + \ldots + c_1 \cdot x + c_0$ und $r(x) = d_r \cdot x^r + \ldots + d_1 \cdot x + d_0$, wobei gilt: $s = m - n$, $r < n$. Es folgt dann: $p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x)$.
Algorithmus zur Berechnung von $s(x)$ und $r(x)$:	1. Teile die höchsten Terme von $p(x)$ und $q(x)$ durcheinander. Dann erhält man: $\frac{a_m \cdot x^m}{b_n \cdot x^n} = c_s \cdot x^{m-n} = c_s \cdot x^s$ mit $c_s = \frac{a_m}{b_n}$.

	2. Bilde das Differenzpolynom $p_1(x) = p(x) - c_s \cdot x^{m-n} \cdot q(x) = \tilde{a}_t \cdot x^t + \ldots + \tilde{a}_0$. 3. Ist jetzt $t \geq n$, dann verfahre weiter mit den Schritten (1) und (2): Bilde also $\dfrac{\tilde{a}_t \cdot x^t}{b_n \cdot x^n} = c_{s-\lambda} \cdot x^{t-n}$ sowie weiter $p_2(x) = p_1(x) - c_{s-\lambda} \cdot x^{t-n} \cdot q(x) = \hat{a}_\mu \cdot x^\mu + \ldots + \hat{a}_0$. 4. Am Ende erhält man das gesuchte Polynom $s(x)$ in der Form $s(x) = c_s \cdot x^{m,-n} + c_{s-\lambda} \cdot x^{t-n} + \ldots$ und $r(x)$ als das erste Differenzpolynom $r(x) = p_k(x)$ mit $\mu = grad\, r < n$.

<u>*Bemerkung*</u>:
Häufig findet die *Polynomdivision* eines Polynoms $p(x)$ durch einen *linearen Term* der Form $q(x) = x - x_0$ mit $x_0 \in \boldsymbol{R}$ besondere Anwendung. In diesem Spezialfall ist wieder einmal das *Hornerschema* extrem hilfreich, liefert doch sein Algorithmus zur Berechnung des Funktionswertes $p(x_0)$ eines Polynoms an der vorgegebenen Stelle $x_0 \in \boldsymbol{R}$ die Polynomdivision durch den Term $q(x) = x - x_0$ gleich automatisch mit:

Die Zahlen c_m bis c_0 in der letzten Zeile im Hornerschema mit dem Wert x_0 anstelle von b bilden nämlich gerade die *Koeffizienten* der Polynome $q(x)$ und $r(x)$ in der Darstellung $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r(x)$. Genauer gilt: $q(x) = c_m \cdot x^{m-1} + c_{m-1} \cdot x^{m-2} + \ldots + c_2 \cdot x + c_1$ sowie $r(x) \equiv c_0$. Ist speziell x_0 eine *Nullstelle* von $p(x)$, so erhält man: $r(x) \equiv 0$.

Lineare Gleichungssysteme

- Ein System von m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Form

$$(*) \qquad \boxed{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}}$$

  heißt ein *lineares Gleichungssystem* (*LGS*). Die $m \cdot n$ Zahlen a_{ik} $(1 \leq i \leq m , 1 \leq k \leq n)$ in $(*)$ heißen die *Koeffizienten des Gleichungssystems*, die m Zahlen b_i $(1 \leq i \leq m)$ die *Koeffizienten der rechten Seite*.
- Fasst man die Koeffizienten a_{ik} $(1 \leq i \leq m , 1 \leq k \leq n)$ zu einem Rechteckschema

  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ zusammen - A heißt dann eine $m \times n$ - *Matrix* - und die Unbekannten x_k $(1 \leq k \leq n)$ sowie die Koeffizienten b_i $(1 \leq i \leq m)$ der rechten Seite je-