

**Formelsammlung zur
„Mathematik I / II für die Beruflichen Fachrichtungen
Bautechnik, Metalltechnik und Elektrotechnik“**

Die b-adische Darstellung rationaler Zahlen

Wir beginnen zunächst mit der Darstellung von ganzen Zahlen $x \in \mathbf{Z}$ bezüglich einer beliebigen Zahlenbasis $b \in \mathbf{N}$, $b \geq 2$. Wir nennen dies die Darstellung im *b-adischen System*.

Die Darstellung ganzer Zahlen bezügl. verschiedener Basen	
<p><i>Definition der b-adischen Darstellung einer ganzen Zahl:</i></p>	<p>$b \in \mathbf{N}$, $b \geq 2$ sei Basis, $Z = \{0, \dots, b-1\}$ die Menge der zugehörigen Ziffern, z.B.: $Z = \{0, \dots, 9\}$ für $b = 10$ (Dezimalsystem), $Z = \{0, 1\}$ für $b = 2$ (Binärsystem), $Z = \{0, \dots, 9, A, \dots, F\}$ für $b = 16$ (Hexadezimalsystem).</p> <p>Für die <i>b-adische Darstellung</i> von $x \in \mathbf{Z}$ gilt dann:</p> $x = \pm (a_m a_{m-1} \dots a_0)_b := \pm (a_m \cdot b^m + a_{m-1} \cdot b^{m-1} + \dots + a_0 \cdot b^0)$ <p>mit $a_m \neq 0$, $a_k \in Z$ für $k = 0, \dots, m$.</p>
<p><i>Gewinnung der b-adischen Darstellung einer Zahl $x \in \mathbf{N}$:</i></p>	<p>Fortgesetzte (ganzzahlige) Division von $x \in \mathbf{Z}$ durch b mit Rest liefert:</p> $x = c_1 \cdot b + a_0 ; c_1 = c_2 \cdot b + a_1 ; \dots ; c_m = 0 \cdot b + a_m \quad \text{mit } 0 \leq a_k < b$ <p>Dann ist $x = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_b$ die <i>b-adische Darstellung</i> von x.</p>
<p><i>Das kleine Eins-plus-Eins und Ein-mal-Eins im Binärsystem:</i></p>	<p>Im Fall des Rechnens im System mit Basis $b = 2$ gilt:</p> $0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = (\mathbf{10})_2,$ $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$
<p><i>Umwandlung einer Binärzahl in die Darstellung mit Zweierpotenzbasis:</i></p>	<p>Sei $x = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_2$ Binärzahl mit $a_k \in \{0, 1\}$, $k = 0, \dots, m$ und $a_m = 1$ sowie $b = 2^n$ ($n \in \mathbf{N}$) eine neu gewählte Basis.</p> <p>Dann erhält man die Darstellung von x bezügl. b durch</p> <p>(i) <i>rechtsbündiges</i> Zusammenfassen der Binärziffern von x in Blöcke der Länge n bei evt. Auffüllen des letzten (linken) Blockes mit Nullen und</p> <p>(ii) Umwandlung der einzelnen Blöcke in b-Ziffern.</p> <p>Also erhält man $x = (b_r b_{r-1} \dots b_1 b_0)_b$, wobei für $k = 0, \dots, r$ gilt:</p> $b_k = a_{(k+1) \cdot n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_{k \cdot n+1} \cdot 2^1 + a_{k \cdot n} \cdot 2^0$

Wir wollen im folgenden die allgemeine b-adische Darstellung für reelle Zahlen einführen und uns dann speziell der b-adischen Darstellung *rationaler* Zahlen $x \in \mathbf{Q}$ zuwenden:

Die Darstellung rationaler Zahlen bezügl. verschiedener Basen	
<p><i>Definition der b-adischen Darstellung einer beliebigen reellen Zahl $x \in \mathbf{R}$:</i></p>	<p>$b \in \mathbf{N}$, $b \geq 2$ sei Basis, $Z = \{0, \dots, b-1\}$ die Menge der zugehörigen Ziffern.</p> <p>Für die b-adische Darstellung von $x \in \mathbf{R}$, $x < 1$ gilt dann:</p> $x = \pm (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_b := \pm (a_1 \cdot b^{-1} + a_2 \cdot b^{-2} + a_3 \cdot b^{-3} + \dots)$ <p>mit $a_k \in Z$ für $k \in \mathbf{N}$.</p>
<p><i>Definition der periodischen b-adischen Darstellung einer rationalen Zahl $x \in \mathbf{Q}$:</i></p>	<p>Gibt es ein $\mu \in \mathbf{N}$ sowie ein $\lambda \in \mathbf{N}$ (μ, λ minimal gewählt), so daß für alle $k \in \mathbf{N}$ gilt $a_{\mu+\lambda+k} = a_{\mu+k}$, so nennt man die b-adische Darstellung von x (gemischt) periodisch mit Vorperiodenlänge μ und Periodenlänge λ. Man schreibt in diesem Fall:</p> $x = (0, a_1 a_2 \dots a_\mu \overline{a_{\mu+1} a_{\mu+2} \dots a_{\mu+\lambda}})_b$
<p><i>Umwandlung des Bruches $x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ in die b-adische Darstellung $x = (b_m \dots b_0, a_1 a_2 a_3 \dots)_b$</i></p>	<p>Ist $p = m \cdot q + r$ mit $m, r \in \mathbf{Z}$ und $0 \leq r < q$, dann gilt:</p> $x = m + x' \text{ mit } x' = \frac{r}{q} \in \mathbf{Q}, 0 \leq x' < 1.$ <p>Die b-adische Darstellung für $m \in \mathbf{Z}$ erhält man, wie bekannt.</p> <p>Die b-adische Darstellung für $x' = \frac{r}{q}$ gewinnt man durch fortgesetzte Division mit Rest durch q bei wiederholter Multiplikation des Restes mit b:</p> $r \cdot b = a_1 \cdot q + r_1; r_1 \cdot b = a_2 \cdot q + r_2; \dots; r_k \cdot b = a_{k+1} \cdot q + r_{k+1}; \dots$ <p>mit $0 \leq r_k < q$, $k \in \mathbf{N}$. Dann ist $x' = (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_b$ die gesuchte b-adische Darstellung von x'.</p> <p>Bei der b-adischen Entwicklung von x' gibt es zwei Fälle:</p> <p>(i) $r_{n+1} = 0$ für ein $n \in \mathbf{N}$: Dann gilt $a_k = 0$ für alle $k \geq n+1$, und die b-adische Entwicklung $x' = (0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n)_b$ ist endlich.</p> <p>(ii) $r_{\mu+\lambda+1} = r_{\mu+1}$ für $\mu \in \mathbf{N}_0$, $\lambda \in \mathbf{N}$ fest (μ, λ „minimal“ gewählt): Dann gilt $a_{\mu+\lambda+k} = a_{\mu+k}$ für $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$, und die b-adische Entwicklung $x' = (0, a_1 a_2 \dots a_\mu \overline{a_{\mu+1} a_{\mu+2} \dots a_{\mu+\lambda}})_b$ ist unendlich periodisch und besitzt die Vorperiodenlänge $\mu \geq 0$ und die Periodenlänge $\lambda \geq 1$.</p>

Umwandlung der endlichen bzw. unendlichen periodischen b-adischen Darstellung

$x = (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_b$ in

einen Bruch $x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$

Wir unterscheiden für $0 \leq x < 1$ die beiden Fälle:

(i) $x = (0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n)_b$ ist endlich. Dann folgt durch Komma-verschiebung um n Stellen nach rechts:

$$b^n \cdot x = (a_1 a_2 a_3 \dots a_n)_b \in \mathbf{Z}. \text{ Also gilt:}$$

$$x = \frac{p}{q} \text{ mit } q = b^n \in \mathbf{N} \text{ und } p = (a_1 a_2 a_3 \dots a_n)_b \in \mathbf{Z}.$$

(ii) $x = (0, a_1 a_2 \dots a_\mu \overline{a_{\mu+1} a_{\mu+2} \dots a_{\mu+\lambda}})_b$ ist unendlich periodisch:

Dann erhalten wir durch entsprechende Kommaverschiebung nach rechts:

$$b^{\mu+\lambda} \cdot x = (a_1 a_2 \dots a_\mu a_{\mu+1} a_{\mu+2} \dots a_{\mu+\lambda}, \overline{a_{\mu+1} a_{\mu+2} \dots a_{\mu+\lambda}})_b$$

$$b^\mu \cdot x = (a_1 a_2 \dots a_\mu, \overline{a_{\mu+1} a_{\mu+2} \dots a_{\mu+\lambda}})_b.$$

Die Differenz beider Ausdrücke führt zum Verschwinden der Periode, und wir haben (beachte, dass $\mu \geq 0$ und $\lambda \geq 1$ ist):

$$(b^{\mu+\lambda} - b^\mu) \cdot x = (a_1 a_2 \dots a_\mu a_{\mu+1} \dots a_{\mu+\lambda})_b - (a_1 a_2 \dots a_\mu)_b \in \mathbf{Z},$$

also $x = \frac{p}{q}$ mit $q = b^{\mu+\lambda} - b^\mu = b^\mu \cdot (b^\lambda - 1) \in \mathbf{N}$ sowie

$$p = (a_1 a_2 \dots a_\mu a_{\mu+1} \dots a_{\mu+\lambda})_b - (a_1 a_2 \dots a_\mu)_b \in \mathbf{Z}.$$

Bemerkungen:

- Zur Umrechnung einer gegebenen Dezimalzahl $x \in \mathbf{Z}$ in die b -adische Darstellung zu einer gegebenen Basis $b > 1$ mittels fortgesetzten Teilens mit Rest kann man die Operatoren „DIV“ für den ganzzahligen Anteil der Zahl b in x sowie „MOD“ für den Rest beim Teilen von x durch b verwenden. Zum Beispiel gilt:

$$23 \text{ DIV } 7 = 3, \quad 23 \text{ MOD } 7 = 2; \text{ denn: } 23 = 3 \cdot 7 + 2,$$

$$-23 \text{ DIV } 7 = -4, \quad -23 \text{ MOD } 7 = 5; \text{ denn: } -23 = (-4) \cdot 7 + 5.$$

- Zur Umrechnung einer b -adischen Zahldarstellung der Form $x = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_b$ ins Dezimalsystem hilft das folgende Horner Schema, welches auf einer geschickten Umklammerung des b -adischen Ausdrucks $x = a_m \cdot b^m + a_{m-1} \cdot b^{m-1} + \dots + a_1 \cdot b + a_0$ beruht.

- Man beachte, dass rationale Zahlen der Form $x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ bezüglich jeder Basis entweder eine endliche oder eine unendliche (gemischt) periodische Darstellung besitzen. Ob die Darstellung dabei endlich oder unendlich periodisch ist, hängt von der Wahl der Basis b und ihrem Bezug zum Nenner q des Quotienten $x = \frac{p}{q}$ ab.

Das Hornerschema																						
<i>Umklammerung des Ausdrucks:</i>	Für gegebene Zahlen $a_k \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$ gilt: $a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 =$ $(\dots((a_m \cdot x + a_{m-1}) \cdot x + a_{m-2}) \cdot x \dots + a_1) \cdot x + a_0$																					
<i>Algorithmische Form:</i>	Setze: $c_m = a_m$; $c_{k-1} = c_k \cdot x + a_{k-1}$ für $k = m, \dots, 1$ (k also rückwärts laufend !!). Dann ist c_0 das Ergebnis.																					
<i>Schema:</i>	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;"></td> <td style="text-align: center; padding: 0 10px;">a_m</td> <td style="text-align: center; padding: 0 10px;">a_{m-1}</td> <td style="text-align: center; padding: 0 10px;">a_{m-2}</td> <td style="text-align: center; padding: 0 10px;">...</td> <td style="text-align: center; padding: 0 10px;">a_1</td> <td style="text-align: center; padding: 0 10px;">a_0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Produkte:</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">0</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">$c_m \cdot x$</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">$c_{m-1} \cdot x$</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">...</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">$c_2 \cdot x$</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">$c_1 \cdot x$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Summen:</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">c_m</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">c_{m-1}</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">c_{m-2}</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">...</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">c_1</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: center; padding: 0 10px;">c_0</td> </tr> </table>		a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	...	a_1	a_0	Produkte:	0	$c_m \cdot x$	$c_{m-1} \cdot x$...	$c_2 \cdot x$	$c_1 \cdot x$	Summen:	c_m	c_{m-1}	c_{m-2}	...	c_1	c_0
	a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	...	a_1	a_0																
Produkte:	0	$c_m \cdot x$	$c_{m-1} \cdot x$...	$c_2 \cdot x$	$c_1 \cdot x$																
Summen:	c_m	c_{m-1}	c_{m-2}	...	c_1	c_0																

Bemerkungen:

- Man füllt im Hornerschema sukzessive die beiden unteren Zeilen *spaltenweise von links nach rechts* aus. Das Ergebnis c_0 steht dann in der *rechten unteren Ecke*.
- Das Hornerschema zur Berechnung der b-adischen Darstellung einer Zahl $x \in \mathbf{Z}$ kommt mit maximal $2m$ *Rechenoperationen* aus, nämlich m *Multiplikationen* und m *Additionen*. Damit ist dieser Algorithmus äußerst geeignet für die Implementierung auf einem Computer.

Übersicht über die verschiedenen Zahlbereiche

Für die Zahlbereiche gelten folgende Teilmengenbeziehungen: $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$.

Dabei ist jede *Zahlbereichserweiterung* mit folgendem „Gewinn“ bzw. „Verlust“ verbunden:

