

Arbeitsdokument zur Probeklausur

Liebe Studierende,

Sie finden in diesem Dokument alle Aufgaben der Probeklausur sowie Hinweise und mögliche Lösungen. Arbeiten Sie möglichst selbstständig zur Vorbereitung auf die Klausur. Bitte halten Sie sich an das folgend beschriebene empfohlene Vorgehen.

- ① Versuchen Sie die Aufgabe so weit wie möglich selbst und ohne Hilfe zu lösen.
- ② Nutzen Sie bei Problemen den Link auf die Hilfe. Sie finden dort bspw. Seitenangaben für Ihre Formelsammlung oder konkrete Verfahrenshinweise.
- ③ Fragen Sie auch Ihren Tutor bzw. Ihre Lerngruppenmitglieder, falls die digitale Hilfe Sie nicht weiterbringt. Vermeiden Sie aber Störungen der anderen Lernenden, die nicht zu Ihrer Lerngruppe gehören.
- ④ Nutzen Sie die Lösung möglichst nur zur Korrektur Ihrer Ergebnisse, Sie können diese aber auch als Hilfe nutzen. Beachten Sie, dass Sie nicht den gleichen Lösungsweg wie in der Lösung eingeschlagen haben müssen. Fragen Sie bei Unsicherheiten bzgl. Ihres Lösungsvorgehens Ihren Tutor.

Hilfsmittel Formelsammlung

<http://userpage.fu-berlin.de/frobert/FormelnMatheII.pdf>

Übersicht zur Navigation

Aufgabe 1	Hilfe zur Aufgabe 1	Lösungsvorschlag zur Aufgabe 1
Aufgabe 2	Hilfe zur Aufgabe 2	Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2
Aufgabe 3	Hilfe zur Aufgabe 3	Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3
Aufgabe 4	Hilfe zur Aufgabe 4	Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4
Aufgabe 5	Hilfe zur Aufgabe 5	Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5
Aufgabe 6	Hilfe zur Aufgabe 6	Lösungsvorschlag zur Aufgabe 6

Aufgabe 1

[zur Hilfe](#)

[zur Lösung](#)

Gegeben sei die Ebene E , welche die drei Koordinatenachsen bei $x = 2$, $y = 4$ und $z = 1$ schneidet.

- a) Stellen Sie die Gleichung von E in Parameterform und in Hessescher Normalform auf.
- b) Leiten Sie die Gleichung der Lotgeraden g zu E in parameterfreier, d.h. Plücker-scher Darstellung her, welche durch den Punkt $P(1, 0, 0)$ verläuft.
- c) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden h zwischen E und der xz -Ebene in Parameterdarstellung.
- d) Berechnen Sie nacheinander die Abstände
 - i) $\text{dist}(P, E)$ von P zu E ,
 - ii) $\text{dist}(P, h)$ von P zu h sowie
 - iii) $\text{dist}(g, h)$ der beiden Geraden g und h .

Aufgabe 2

[zur Hilfe](#)

[zur Lösung](#)

Unter Rückgriff auf die Theorie der quadratischen Gleichungen löse man folgende Textaufgabe und mache die Probe dazu.

Gesucht sind zwei positive reelle Zahlen x und y , deren Differenz 2 ist und deren Summe der Kehrwerte 1 beträgt. Wie lauten die beiden Zahlen?

Aufgabe 3

[zur Hilfe](#)

[zur Lösung](#)

Gegeben sei die Gleichung 4. Grades:

$$(*) \quad f(x) = 2x^4 + 11x^3 + 20x^2 + 7x - 10 = 0.$$

- a) Man bestimme den *Wertevorrat* für die *rationalen Nullstellen* des Polynoms und ermittle unter Verwendung des Hornerschemas die beiden rationalen Lösungen von (*). Mittels *Polynomdivision* (Horner) reduziere man (*) auf eine quadratische Gleichung.
- b) Berechnen Sie die beiden restlichen Lösungen von (*) - welcher Typ liegt vor? - und führen Sie die Probe nach Vieta durch. Geben Sie anschließend für das Polynom $f(x) = 2x^4 + 11x^3 + 20x^2 + 7x - 10$ die Zerlegung in sämtliche Linearfaktoren an.

Aufgabe 4

[zur Hilfe](#)

[zur Lösung](#)

- a) Ermitteln Sie für das Polynom $p(z) = z^2 + (1 - 2i)z + (1 - 7i)$ die beiden komplexen Nullstellen und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mittels der Probe nach Vieta.
- b) Bestimmen Sie mittels geeigneter Substitution und unter Zuhilfenahme der Lösungen in Teil (a) die komplexen Nullstellen des Polynoms $q(z) = z^{10} + (1 - 2i)z^5 + (1 - 7i)$ in der Eulerschen Form.
- c) Skizzieren Sie die Lösungen aus Teil (b) in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 5

[zur Hilfe](#)

[zur Lösung](#)

Unter Anwendung der Potenz- und Logarithmengesetze bestimme man die Lösung x für die folgende Potenzgleichung.

$$7 \cdot 2^{3x+3} + 4 \cdot 3^{4x-2} = 12 \cdot 2^{3x-1} + 11 \cdot 3^{4x-1}$$

Aufgabe 6

[zur Hilfe](#)

[zur Lösung](#)

a) Bestimmen Sie $A > 0$ und $\varphi \in] -\pi, +\pi[$ so, dass gilt

$$y = f(x) = 3 \cdot \sin(2x) - 5 \cdot \cos(2x) = A \cdot \cos(2x + \varphi).$$

b) Bestimmen Sie anschließend die Nullstellen der resultierenden Cosinusfunktion $A \cdot \cos(2x + \varphi)$.

Lösung zur Aufgabe 1

[zur Aufgabe](#)

- a) Die Ebene E geht durch die Punkte $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ und $C(0, 0, 1)$ und mit Hilfe der Dreipunktegleichung auf S. 33 ergibt sich daraus die Parameterform der Ebene:

$$E: \quad \vec{x} = \vec{x}(s, t) = \vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + t \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Hesse Normalform zu bestimmen, wird zunächst ein normierter Normalenvektor bestimmt.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Da $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{84}$, lautet ein möglicher Normalenvektor der Hesseschen Normalform

$$\vec{n} = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{84}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 21}} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Wegen

$$d = \vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot (2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4) = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

gilt die Hesse Normalform von E :

$$E: \quad \vec{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

- b) Die Lotgerade g geht durch den Punkt $P(1, 0, 0)$, hat also den Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Stützvektor. Zudem ist jeder Normalenvektor von E ein möglicher Richtungsvektor der Lotgeraden. Die Plückersche Darstellung ergibt sich somit nach der Formel auf S. 32 direkt:

$$g: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

- c) Die Ebene E schneidet die Koordinatenachsen bei $x = 2$, $y = 4$ und $z = 1$, somit liegen die Punkte $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ und $C(0, 0, 1)$ auf der Ebene. Die beiden Punkte A und C liegen aber auch in der xz -Ebene. Folglich liegen die beiden Punkte auch auf der Schnittgeraden von E mit der xz -Ebene und da zwei verschiedene Punkte eindeutig eine Gerade beschreiben, können wir die Schnittgerade mit der Zweipunktgleichung auf S. 32 direkt bestimmen:

$$h: \vec{x} = \vec{x}(r) = \vec{a} + r \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- d) Alle Formeln von S. 35.

$$\text{i) } \boxed{\text{dist}(P, E)} = |\vec{p} \cdot \vec{n} - d| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{21}} \right| = \left| -\frac{2}{\sqrt{21}} \right| = \frac{2}{\sqrt{21}} \approx 0,44$$

ii) Mit $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ gilt:

$$\begin{aligned} \boxed{dist(P, h)} &= \frac{1}{v} \|\vec{v} \times (\vec{p} - \vec{a})\| \\ &= \frac{1}{v} \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,45} \end{aligned}$$

iii) Die benötigte Abstandsformel lautet

$$dist(g, h) = \frac{V}{A} = \frac{\|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{a}_2 - \vec{a}_1)\|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}$$

Wir berechnen also zunächst das Kreuzprodukt aus beiden Richtungsvektoren und dessen Norm:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + (-10)^2 + 2^2} = \sqrt{105}$$

Die Determinante aus dem Zähler des Abstandes beträgt zudem:

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Somit gilt

$$\boxed{dist(g, h) = \frac{V}{A} = \frac{\|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{a}_2 - \vec{a}_1)\|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{105}} \approx 0,1}$$

Lösung zur Aufgabe 2

zur Aufgabe

Aus dem Text kann man die beiden Gleichungen

$$\text{I: } x - y = 2$$

$$\text{II: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

herauslesen. Aus der Gleichung (I) folgt sofort

$$x = 2 + y \quad (\diamond)$$

und eingesetzt in die Gleichung (II) erhält man

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2+y} + \frac{1}{y} = 1 \\ \Rightarrow 1 + \frac{2+y}{y} = 2 + y \\ \Rightarrow y + 2 + y = (2 + y) \cdot y \\ \Rightarrow 2y + 2 = 2y + y^2 \\ \Rightarrow 2 = y^2 \\ \Rightarrow y_1 = \sqrt{2} \\ \text{und } y_2 = -\sqrt{2} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot (2 + y) \\ \cdot y \\ \text{Klammern auflösen, Zusammenfassen} \\ - 2y \\ \sqrt{\quad} \end{array} \right.$$

Setzt man diese beiden Lösungen in die Gleichung (\diamond) ein, so erhält man die dazugehörigen anderen Zahlen:

$$y_1 = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_1 = 2 + \sqrt{2}$$

$$y_2 = -\sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

Da wir nur **positive reelle Zahlen** suchen, entfällt das Lösungspaar x_2 und y_2 .

Die **Probe** der erhaltenen Werte kann beispielsweise durch Einsetzen der Werte in die Ausgangsgleichung erfolgen.

Für $y_1 = \sqrt{2}$ und $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ gilt

$$\text{I: } x - y = 2 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 2 \quad \checkmark$$

$$\text{II: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}+2} = 1 \quad \checkmark$$

Lösung zur Aufgabe 3

[zur Aufgabe](#)

a)

① **rationalen Nullstellenpool bestimmen:**

$$x_0 = \frac{r}{s} \quad r \mid -10 \quad s \mid 2$$

ganzz. Teiler: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ $\pm 1, \pm 2$

also $\rightarrow N_P = \left\{ \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{5}{2}, \pm 5, \pm 10 \right\}$

② **Horner-Schema:** (hier nur für die beiden passenden Werte)

Koeff.	2	11	20	7	-10
$x = -2$		-4	-14	-12	10
	2	7	6	-5	0
$x = \frac{1}{2}$		1	4	5	
	2	8	10	0	

oder

Koeff.	2	11	20	7	-10
$x = \frac{1}{2}$		1	6	13	10
	2	12	26	20	0
$x = -2$		-4	-16	-20	
	2	8	10	0	

Die gesuchte quadratische Gleichung lautet somit:

$$2x^2 + 8x + 10 = 0$$

b) Die Lösungen der quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten

$$2x^2 + 8x + 10 = 0$$

können mit Hilfe der Lösungsformeln auf S. 36 bestimmt werden.

Dazu wird zunächst die Diskriminante bestimmt:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -16$$

Da $\Delta = -16 < 0$ gibt es zwei komplexe Lösungen:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot 2} + i \frac{\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 10 - 8^2}}{2 \cdot 2} = -2 + i$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} - i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot 2} - i \frac{\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 10 - 8^2}}{2 \cdot 2} = -2 - i$$

Probe nach Vieta: Es gilt $x_1 + x_2 = -2 + i + (-2 - i) = -4$ und das ist gleich mit $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{2} = -4$. Zudem ist $x_1 \cdot x_2 = (-2 + i)(-2 - i) = 5$ und das ist identisch mit $\frac{c}{a} = \frac{10}{2} = 5$. Somit ist die Probe nach Vieta erfolgreich.

Mit Hilfe der bestimmten Nullstellen $x_1 = -2 + i$, $x_2 = -2 - i$, $x_2 = -2$ und $x_3 = \frac{1}{2}$ aus den beiden vorherigen Teilaufgaben kann direkt die Linearfaktorisierung von f angegeben werden. Dabei bitte nicht den **Leitkoeffizienten** vergessen!

$$f(x) = 2 \cdot (x + 2 - i) \cdot (x + 2 + i) \cdot (x + 2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Lösung zur Aufgabe 4

[zur Aufgabe](#)

a) Zur Lösung der quadratischen Gleichung

$$0 = z^2 + (1 - 2i)z + (1 - 7i)$$

wird zunächst die Diskriminante bestimmt:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1 - 2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - 7i) = -3 - 4i - 4 + 28i = -7 + 24i = \alpha + \beta \cdot i$$

Mit Hilfe der Diskriminante werden Hilfslösungen w_1 und w_2 bestimmt:

$$\begin{aligned} w_1 &\stackrel{\beta \geq 0}{=} \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + 28^2} + (-7)}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2 + 28^2} - (-7)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{625} - 7}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{625} + 7}{2}} \\ &= 3 + 4i \\ w_2 &= -w_1 = -3 - 4i \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b+w_1}{2a} & z_2 &= \frac{-b+w_2}{2a} \\ &= \frac{-(1-2i)+3+4i}{2} & &= \frac{-(1-2i)+(-3-4i)}{2} \\ &= \frac{2+6i}{2} & &= \frac{-4-2i}{2} \\ &= 1 + 3i & &= -2 - i \end{aligned}$$

Probe nach Vieta: Es gilt $z_1 + z_2 = 1 + 3i + (-2 - i) = -1 + 2i$ und das ist gleich mit $-\frac{b}{a} = -\frac{1-2i}{1} = -1 + 2i$. Zudem ist $z_1 \cdot z_2 = (1 + 3i)(-2 - i) = 1 - 7i$ und das ist identisch mit $\frac{c}{a} = \frac{1-7i}{1} = 1 - 7i$. Somit ist die Probe nach Vieta erfolgreich.

b) Es gilt zunächst mit der Substitution $x = z^5$:

$$z^{10} + (1 - 2i)z^5 + (1 - 7i) = 0 \quad \stackrel{x=z^5}{\Rightarrow} x^2 + (1 - 2i)x + (1 - 7i) = 0$$

Daraus ergeben sich die beiden Lösungen $z_1 = 1 + 3i$ und $z_2 = -2 - i$.

Nun verbleibt noch die Rücksubstitution für jede einzelne der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung.

z_1 : Der Radius ist $r = |z_1| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

Der Winkel beträgt wegen $\text{Im}(z_1) = 3 \geq 0$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 1,25 \approx \frac{2}{5}\pi$$

Also $z_1 = \sqrt{10} \cdot e^{i\frac{2}{5}\pi}$.

Mit Hilfe der Lösungsformel auf S. 48 ergeben sich nun für

$$z^5 = z_1 = \sqrt{10} \cdot e^{i\frac{2}{5}\pi}$$

die fünf Lösungen

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[5]{10} \cdot e^{i\frac{2}{25}\pi} = \sqrt[5]{10} \cdot \left(\cos\left(\frac{2}{25}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{25}\pi\right) \right) \approx 1,22 + 0,31i \\ z_1 &= \sqrt[5]{10} \cdot e^{i\frac{12}{25}\pi} = \sqrt[5]{10} \cdot \left(\cos\left(\frac{12}{25}\pi\right) + i \sin\left(\frac{12}{25}\pi\right) \right) \approx 0,08 + 1,26i \\ z_2 &= \sqrt[5]{10} \cdot e^{i\frac{22}{25}\pi} = \sqrt[5]{10} \cdot \left(\cos\left(\frac{22}{25}\pi\right) + i \sin\left(\frac{22}{25}\pi\right) \right) \approx -1,17 + 0,46i \\ z_3 &= \sqrt[5]{10} \cdot e^{i\frac{32}{25}\pi} = \sqrt[5]{10} \cdot \left(\cos\left(\frac{32}{25}\pi\right) + i \sin\left(\frac{32}{25}\pi\right) \right) \approx -0,8 - 0,97i \\ z_4 &= \sqrt[5]{10} \cdot e^{i\frac{42}{25}\pi} = \sqrt[5]{10} \cdot \left(\cos\left(\frac{42}{25}\pi\right) + i \sin\left(\frac{42}{25}\pi\right) \right) \approx 0,67 - 1,06i \end{aligned}$$

z_2 : Der Radius ist $r = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

Der Winkel beträgt wegen $\text{Im}(z_2) = -1 < 0$

$$\varphi = -\arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = -2,68 \approx -0,85\pi$$

Also $z_2 = \sqrt{5} \cdot e^{-i\cdot 0,85\pi}$.

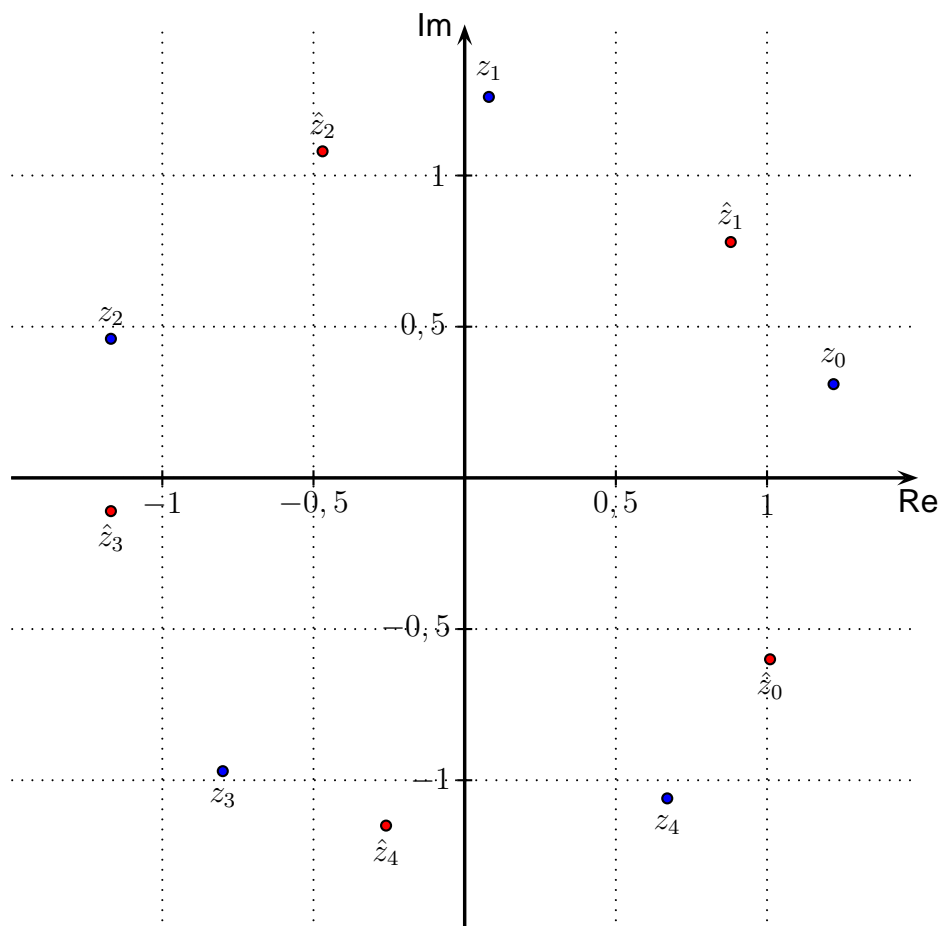
Mit Hilfe der Lösungsformel auf S. 48 ergeben sich nun wieder für

$$z^5 = z_2 = \sqrt{5} \cdot e^{-i \cdot 0,85\pi}$$

die fünf dazugehörigen Lösungen

\hat{z}_0	$= \sqrt[10]{5} \cdot e^{-i \cdot 0,17\pi}$	$= \sqrt[10]{5} \cdot \left(\cos(-0,17\pi) + i \sin(-0,17\pi) \right)$	$\approx 1,01 - 0,60i$
\hat{z}_1	$= \sqrt[10]{5} \cdot e^{i \cdot 0,23\pi}$	$= \sqrt[10]{5} \cdot \left(\cos(0,23\pi) + i \sin(0,23\pi) \right)$	$\approx 0,88 + 0,78i$
\hat{z}_2	$= \sqrt[10]{5} \cdot e^{i \cdot 0,63\pi}$	$= \sqrt[10]{5} \cdot \left(\cos(0,63\pi) + i \sin(0,63\pi) \right)$	$\approx -0,47 + 1,08i$
\hat{z}_3	$= \sqrt[10]{5} \cdot e^{i \cdot 1,03\pi}$	$= \sqrt[10]{5} \cdot \left(\cos(1,03\pi) + i \sin(1,03\pi) \right)$	$\approx -1,17 - 0,11i$
\hat{z}_4	$= \sqrt[10]{5} \cdot e^{i \cdot 1,43\pi}$	$= \sqrt[10]{5} \cdot \left(\cos(1,43\pi) + i \sin(1,43\pi) \right)$	$\approx -0,26 - 1,15i$

c)



Lösung zur Aufgabe 5

zur Aufgabe

$7 \cdot 2^{3x+3} + 4 \cdot 3^{4x-2} = 12 \cdot 2^{3x-1} + 11 \cdot 3^{4x-1}$		gleiche Potenzen erzeugen
$\Leftrightarrow 7 \cdot 2^3 \cdot 2^{3x} + 4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{4x} = 12 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{3x} + 11 \cdot 3^{-1} \cdot 3^{4x}$		Vorfaktoren zusammenfassen
$\Leftrightarrow 56 \cdot 2^{3x} + \frac{4}{9} \cdot 3^{4x} = 6 \cdot 2^{3x} + \frac{11}{3} \cdot 3^{4x}$		$-\frac{4}{9} \cdot 3^{4x} - 6 \cdot 2^{3x}$
$\Leftrightarrow 50 \cdot 2^{3x} = \frac{29}{9} \cdot 3^{4x}$		Logarithmieren
$\Leftrightarrow \ln(50 \cdot 2^{3x}) = \ln\left(\frac{29}{9} \cdot 3^{4x}\right)$		Logarithmengesetze anwenden
$\Leftrightarrow \ln(50) + \ln(2^{3x}) = \ln\left(\frac{29}{9}\right) + \ln(3^{4x})$		Logarithmengesetze anwenden
$\Leftrightarrow \ln(50) + 3x \cdot \ln(2) = \ln(29) - \ln(9) + 4x \cdot \ln(3)$		$-\ln(50) - 4x \cdot \ln(3)$
$\Leftrightarrow 3x \cdot \ln(2) - 4x \cdot \ln(3) = \ln(29) - \ln(9) - \ln(50)$		x Ausklammern
$\Leftrightarrow x \cdot (3 \ln(2) - 4 \ln(3)) = \ln(29) - \ln(9) - \ln(50)$		$: (3 \ln(2) - 4 \ln(3))$
$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(29) - \ln(9) - \ln(50)}{3 \ln(2) - 4 \ln(3)} \approx 1,1844$		

Für diese Aufgabe gibt es natürlich eine Vielzahl an möglichen Lösungswegen. Am Ende zählt das richtige Rechnen und das Ergebnis.

Lösung zur Aufgabe 6

[zur Aufgabe](#)

a) Zur Lösung muss das Additionstheorem für den Cosinus angewendet werden:

$$\begin{aligned} A \cdot \cos(2x + \varphi) &= A \cdot (\cos(2x) \cdot \cos(\varphi) - \sin(2x) \cdot \sin(\varphi)) \\ &= A \cdot \cos(2x) \cdot \cos(\varphi) - A \cdot \sin(2x) \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich durch Vergleich beider Seiten der Gleichung

$$3 \cdot \sin(2x) - 5 \cdot \cos(2x) = A \cdot \cos(2x) \cdot \cos(\varphi) - A \cdot \sin(2x) \cdot \sin(\varphi)$$

ein nichtlineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} \text{I: } 3 = -A \cdot \sin(\varphi) \\ \text{II: } -5 = A \cdot \cos(\varphi) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{I: } A \cdot \sin(\varphi) = -3 \\ \text{II: } A \cdot \cos(\varphi) = -5 \end{array}$$

Die Gleichungen $A \cdot \sin(\varphi) = -3$ und $A \cdot \cos(\varphi) = -5$ können als Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl interpretiert werden:

$$z = a + bi = -5 - 3i = A \cdot \cos(\varphi) + A \cdot \sin(\varphi) \cdot i = A \cdot e^{i\varphi}$$

Das A ergibt sich somit als Argument der komplexen Zahl $z = -5 - 3i$:

$$A = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

Da $\text{Im}(z) = -3 < 0$, ist

$$\varphi = -\arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{34}}\right) = -2,60 \approx -\frac{4}{5}\pi.$$

Die erhaltene Cosinusschwingung lautet also:

$$A \cdot \cos(2x + \varphi) = \sqrt{34} \cdot \cos(2x - 2,60).$$

b) Zur Nullstellenbestimmung von

$$A \cdot \cos(2x + \varphi) = \sqrt{34} \cdot \cos(2x - 2,60) = 0$$

substituieren wir zunächst $t = 2x - 2,60$. Damit ist das Problem

$$\sqrt{34} \cdot \cos(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(t) = 0$$

zu lösen. Die Lösungen dazu lauten laut Formelsammlung S. 50

$$t = \frac{1}{2}\pi + \pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir letztlich die Nullstellen der Cosinusfunktion:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}\pi + \pi \cdot k \\ \Leftrightarrow 2x - 2,60 &= \frac{1}{2}\pi + \pi \cdot k \\ \Leftrightarrow 2x &= 4,17 + \pi \cdot k \\ \Leftrightarrow x &= 2,09 + \frac{1}{2}\pi \cdot k \end{aligned}$$

Die gesuchten Nullstellen lauten also:

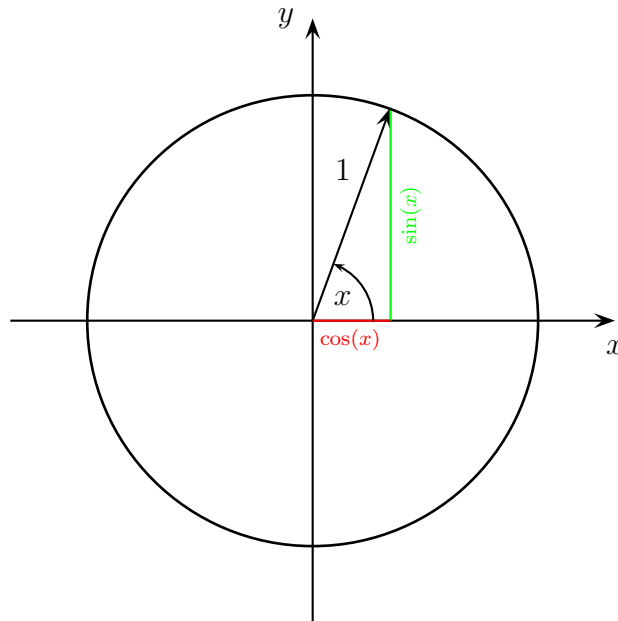
$$x = 2,09 + \frac{1}{2}\pi \cdot k.$$

Zu den Nullstellen des Cosinus: Dass

$$t = \frac{1}{2}\pi + \pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

tatsächlich die Nullstellen des Cosinus sind, kann man sich bspw. am Einheitskreis verdeutlichen. Siehe dazu die nächsten Seiten.

Der Cosinus ist die Projektion des Zeigers auf die x -Achse:



Daraus wird zunächst klar, dass Cosinus für $x = \frac{1}{2}\pi = 90^\circ$ Null ergibt, da dann die "rote Linie" die Länge Null hat.

Wenn wir nun das x größer als $\frac{1}{2}\pi$ werden lassen, dann wird der Cosinus jeweils wieder Null (die "rote Linie" hat wieder Länge Null), wenn wir genau einen Halbkreis (π) oder einen Vollkreis (2π) oder oder oder ... weiter sind, d.h. bei

$$x = \frac{1}{2}\pi + \pi \text{ oder } x = \frac{1}{2}\pi + 2\pi \text{ oder } x = \frac{1}{2}\pi + 3\pi \text{ usw.}$$

Natürlich geht das auch "rückwärts", d.h. der Cosinus wird auch für

$$x = \frac{1}{2}\pi - \pi \text{ oder } x = \frac{1}{2}\pi - 2\pi \text{ oder } x = \frac{1}{2}\pi - 3\pi \text{ usw.}$$

Null.

Allgemein gilt also:

$$\cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\pi + \pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Hier die Visualisierung des Einheitskreises zum Nachvollziehen der Gedanken:

http://www.geogebra.org/de/examples/trigo_einheitskreis/einheitskreis1.html

Hilfe zur Aufgabe 1

[zur Aufgabe](#)

- a) Überlegen Sie sich, durch welche drei Punkte die Ebene E festgelegt ist. Nutzen Sie anschließend die Dreipunktegleichung auf Seite 33 zur Bestimmung der Ebene in Parameterform. Zur Umformung in die Hessesche Normalform nutzen Sie die Theorie auf S. 34.
- b) Für die Bestimmung der Lotgeraden in parameterfreier Form, d.h. in Plückerscher Darstellung, haben Sie alle "Zutaten" gegeben (siehe S. 32). Überlegen Sie dazu, dass ein Stützvektor einer Geraden gleichzeitig auch der Ortsvektor eines Punktes auf der betreffenden Gerade ist und die Lotgerade senkrecht auf der Ebene E steht. Vielleicht kennen Sie ja schon einen Vektor, der senkrecht auf E steht.
- c) Überlegen Sie sich, ob Sie nicht schon zwei Punkte der Schnittgeraden kennen. Argumentieren Sie nun, dass eine Gerade durch zwei Punkte schon eindeutig bestimmt ist und nutzen Sie die Zweipunktegleichung auf S. 32.
- d) Nutzen Sie die Abstandsformeln auf S. 35.

Hilfe zur Aufgabe 2

[zur Aufgabe](#)

Folgende Schritte könnten Ihnen bei der Lösung der Aufgabe helfen.

- ① Legen Sie für die beiden unbekanntes Zahlen Variablenbuchstaben fest, z.B. x und y oder A und B .
- ② Formulieren Sie die beiden Gleichungen aus dem Text in symbolischer Form. Nutzen Sie dazu ihre festgelegten Bezeichnungen für die beiden unbekanntes Zahlen und behelfen Sie sich ggf. durch eine passende Planskizze.
- ③ Sie erhalten i.R. ein nichtlineares Gleichungssystem. Lösen Sie dieses Gleichungssystem, indem Sie eine Gleichung nach einer Unbekanntes umstellen und in die andere Gleichung einsetzen (Einsetzungsverfahren).
- ④ Nutzen Sie zur Lösung der erhaltenen quadratischen Gleichung die Theorie auf S. 36 f. Denken Sie daran, dass an die Lösung eine Forderung im Aufgabentext zu finden ist.
- ⑤ Machen Sie eine Probe, indem Sie überprüfen, ob Ihre Lösungen den beiden formulierten Bedingungen aus ② auch wirklich genügen.

Hilfe zur Aufgabe 3

[zur Aufgabe](#)

Zwei beispielhafte Aufgaben finden Sie hier:

<http://userpage.fu-berlin.de/frobert/Loesung69a.pdf>

<http://userpage.fu-berlin.de/frobert/Loesung69b.pdf>

Weitere Beispielaufgaben, die ähnlich sind, finden Sie hier:

<http://userpage.fu-berlin.de/frobert/Aufgabe58aundb.pdf>

<http://userpage.fu-berlin.de/frobert/Aufgabe58c.pdf>

<http://userpage.fu-berlin.de/frobert/Aufgabe58d.pdf>

Formelsammlung: Auf S. 38 finden Sie die Theorie zum Lösen von Gleichungen höheren Grades. Auf S. 36 f. die Theorie zum Lösen quadratischer Gleichungen mit reellen Koeffizienten und der Probe nach Vieta.

Hilfe zur Aufgabe 4

[zur Aufgabe](#)

Zur Lösung der quadratischen Gleichung: S. 43.

Zur Probe nach Vieta: S. 37.

Zur Substitution: Überlegen Sie sich, welche Potenz von z selbst als Potenz in der Gleichung vorkommt. D.h. suchen Sie nach einem mehrfach vorkommenden "mathematischen Objekt", das sie gegen ein neues mathematisches Objekt vorübergehend austauschen können.

Zur Rücksubstitution: Setzen Sie jede einzelne Lösung der quadratischen Gleichung in die Substitutionsgleichung ein. Nutzen Sie dann S. 48.

Zum Eintragen in die Gaußsche Zahlenebene: Tragen Sie den Radius als Kreis ein. Anschließend tragen Sie den Winkel ausgehend von der positiven Realteilachse entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn ein.

Hilfe zur Aufgabe 5

[zur Aufgabe](#)

Die Beispielaufgabe aus dem letzten Tutorium finden Sie durch den folgenden Link und daran könnten Sie sich bei der Lösung der Aufgabe orientieren.

<http://userpage.fu-berlin.de/frobert/Mathematik/Mittelstufe/LoesenPotGleichungen/LoesenPotGleichungen.pdf>

Ansonsten finden Sie hier die Plakate aus dem letzten Tutorium, die auch als Orientierung zur Lösung der Aufgabe dienen können.

<http://userpage.fu-berlin.de/frobert/Plakat1.pdf>

<http://userpage.fu-berlin.de/frobert/Plakat2.pdf>

<http://userpage.fu-berlin.de/frobert/Plakat3.pdf>

Falls Sie die **Potenzgesetze** benötigen: S. 53.

Oder die **Logarithmengesetze**: S. 55 f.

Hilfe zur Aufgabe 6

[zur Aufgabe](#)

a) Folgende Schritte könnten Ihnen bei der Lösung der Teilaufgabe helfen.

- ① Formen Sie $A \cdot \cos(\omega x + \varphi)$ zunächst mit Hilfe der Additionstheoreme (S. 51) in eine Summe um.
- ② Machen Sie "Koeffizientenvergleich" bei der ursprünglichen Gleichung, in der Sie das Ergebnis aus ① eingesetzt haben.
- ③ Lösen Sie das nichtlineare Gleichungssystem. **Schritt 1:** Quadrieren Sie beide Gleichungen und addieren Sie sie. Nutzen sie den trigonometrischen Pythagoras aus (S. 50) und bestimmen Sie A . **Schritt 2:** Dividieren Sie beide Gleichungen, sodass sie den Tangens erhalten (Sinus durch Cosinus, S. 25). Bestimmen Sie φ .

b) Folgende Schritte könnten Ihnen bei der Lösung der Teilaufgabe helfen.

- ① Setzen Sie zunächst $A \cdot \cos(\omega x + \varphi)$ Null und teilen Sie durch A .
- ② Substituieren Sie $t = \omega x + \varphi$ und lösen Sie das neue Problem, indem Sie die Lösung aus der Formelsammlung abschreiben (S. 50).
- ③ Setzen Sie das Ergebnis aus ② gleich der Substitution und lösen sie nach x auf. Sie erhalten direkt die Nullstellen von $A \cdot \cos(\omega x + \varphi)$.