Musterlösung der Probeklausur zur „Mathematik III für Bten"

WiSe 2017/2018

① $p(z) = z^{10} - 4z^5 + 8$:

a) Substitution: $\boxed{w = z^5}$ (wegen $z^{10} = (z^5)^2$)

führt auf die zu lösende Gleichung

$$q(w) = p(z) = (z^5)^2 + 4z^5 + 8 = w^2 + 4w + 8 \overset{!}{=} 0$$

Koeffizienten: $a = 1,\ b = -4,\ c = 8$ ergeben:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0$$

$\Rightarrow$ 2 konjugiert komplexe Nullstellen für $q(w)$:

$$w_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}\,i}{2a} = \frac{+4 \pm \sqrt{16}\,i}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1 = \frac{4+4i}{2} = 2+2i,\quad w_2 = \overline{w_1} = 2-2i}$$

[Vieta-Probe (nicht gefordert):

(i) $w_1 + w_2 = (2+2i) + (2-2i) = 4 \overset{!}{=} -\frac{b}{a} = -\frac{(-4)}{1} = 4$ ✓

(ii) $w_1 w_2 = (2+2i)(2-2i) = 4 - 4i^2 = 4 + 4 = 8 \overset{!}{=} \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$ ✓]

Resubstitution: Mit $w_{1/2}$ erhält man folgende 2 zu lösende Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} &(1)\quad z^5 = w_1 = 2+2i \\ &(2)\quad z^5 = w_2 = 2-2i \end{aligned}}$$

Wegen $w_2 = \overline{w_1}$ sind die Lösungen z_k zu (2) genau die konjugiert komplexen Lösungen zu (1)!

= Pk. 2 =

Also reicht es, die 5 Lösungen z_k zu (1) zu ermitteln.
Sind z_k ($k=0,1,2,3,4$) die Lösungen zu $z^5 = 2+2i$,
so sind die 5 Lösungen $\tilde{z}_k$ ($k=1,\dots,5$) zu $z^5 = 2-2i$
gerade gegeben durch $\boxed{\tilde{z}_k = \overline{z}_k}$ ($k=0,\dots,4$).

Also ran an (1) $z^5 = w_1 = 2+2i$.

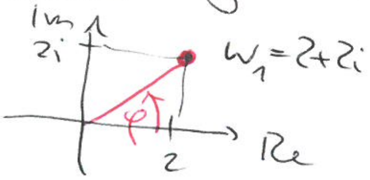
Umwandlung von w_1 in die Eulersche Form:

$\boxed{w_1 = 2+2i = r \cdot e^{i\varphi}}$ mit $\boxed{r = |w_1| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$,

$$\boxed{\varphi = \arg(w_1)} \underbrace{=}_{\mathrm{Im}(w_1) = 2>0} + \arccos\left(\frac{x}{r}\right) = \arccos\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \pi/4 \; (+2k\pi)$$

Skizze zeigt das auch:



$$\Rightarrow \boxed{w_1 = 2+2i = \sqrt{8} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}}$$

($k \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow \boxed{z_k = \sqrt[5]{w_1}} = \sqrt[5]{\sqrt{8} \cdot e^{i(\pi/4+2k\pi)}} = \left\{8^{1/2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\right\}^{1/5}$$

$$\boxed{= 8^{1/10} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}}$$

($k = 0,1,2,3,4$)

Konkret:

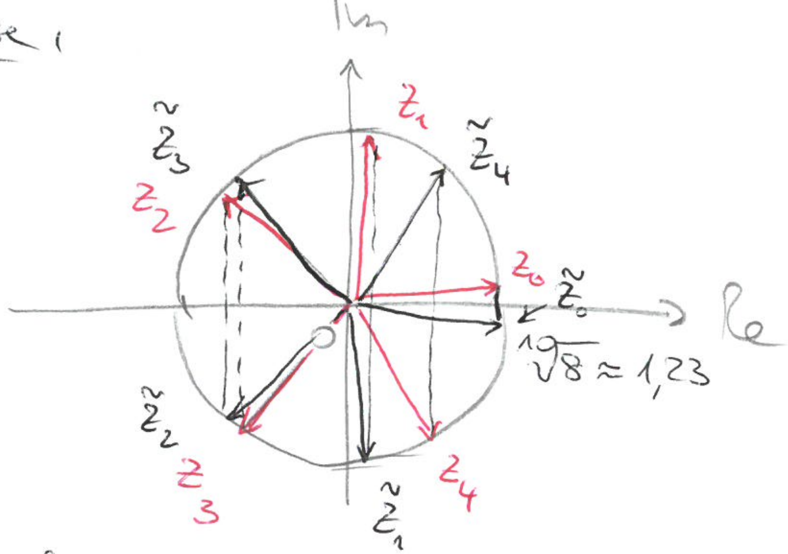
$z_0 = \sqrt[10]{8} \cdot e^{i\pi/20}$, $z_1 = \sqrt[10]{8} \cdot e^{i\frac{9\pi}{20}}$, $z_2 = \sqrt[10]{8} \cdot e^{i\frac{17\pi}{20}}$,

$z_3 = \sqrt[10]{8} \cdot e^{i\frac{25\pi}{20}} = \sqrt[10]{8} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_4 = \sqrt[10]{8} \cdot e^{i\frac{33\pi}{20}}$

Daraus ergeben sich als Lösungen $\tilde{z}_k$ zu $z^5 = 2-2i = w_2$:

$\tilde{z}_0 = \overline{z_0} = \sqrt[10]{8} \cdot \overline{(e^{i\pi/20})} = \sqrt[10]{8} \cdot e^{-i\pi/20}$, $\tilde{z}_1 = \overline{z_1} = \sqrt[10]{8} \cdot e^{-i\frac{9\pi}{20}}$,
$\tilde{z}_2 = \overline{z_2} = \sqrt[10]{8} \cdot e^{-i\frac{17\pi}{20}}$, $\tilde{z}_3 = \overline{z_3} = \sqrt[10]{8} \cdot e^{-i\frac{5\pi}{4}}$, $\tilde{z}_4 = \overline{z_4} = \sqrt[10]{8} \cdot e^{-i\frac{33\pi}{20}}$.

b) Skizze:



Bemerkung: Beachte für die Winkel φ_k zu z_k $(k=0,\dots,4)$ und $\tilde{\varphi}_k = -\varphi_k$ zu $\tilde{z}_k = \overline{z_k}$ $(k=0,\dots,4)$:

$\varphi_0 = \frac{\pi}{20} \mathrel{\hat=} \frac{180^\circ}{20} = 9^\circ$, $\varphi_1 = \frac{9\pi}{20} \mathrel{\hat=} 81^\circ$, $\varphi_2 = \frac{17\pi}{20} \mathrel{\hat=} 153^\circ$,
$\varphi_3 = \frac{25\pi}{20} = \frac{5\pi}{4} \mathrel{\hat=} 225^\circ$, $\varphi_4 = \frac{33\pi}{20} \mathrel{\hat=} 297^\circ$ und analog $\tilde{\varphi}_k = -\varphi_k$.

---

(2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(u) = (\sqrt{u^2+1}, u-2)$.

a) Bestimme Funktionswerte direkt:
$h_1 = f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_2 = g \circ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

(i) $\boxed{h_1(3)} = (f\circ g)(\underset{u}{3}) = f(g(3)) = f(\sqrt{3^2+1}, 3-2) = f(\underset{x}{\sqrt{10}}, \underset{y}{1})$
$= \sqrt{10}^2 - 1^2 = 10 - 1 = \boxed{9}$

= Pk.4 =

(ii) $\boxed{h_1(-2)} = (f\circ g)(-2) = f(\underbrace{g(-2)}_{u}) = f(\underbrace{\sqrt{(-2)^2+1}}_{x}, \underbrace{(-2)-2}_{y})$

$= f(\underbrace{\sqrt{5}}_{x}, \underbrace{-4}_{y}) = \sqrt{5}^2 - (-4)^2 = 5-16 = \boxed{-11}$

(iii) $\boxed{h_2(-1,2)} = (g\circ f)(-1,2) = g(\underbrace{f(-1,2)}_{=u}) = g((\underbrace{-1}_{x})^2 - \underbrace{2}_{y}^2)$

$= g(1-4) = g(\underbrace{-3}_{u}) = (\sqrt{(-3)^2+1}, (-3)-2) = \boxed{(\sqrt{10}, -5)}$

(iv) $\boxed{h_2(5,4)} = (g\circ f)(5,4) = g(\underbrace{f(5,4)}_{=u}) = g(\underbrace{5}_{x}^2 - \underbrace{4}_{y}^2)$

$= g(\underbrace{9}_{u}) = (\sqrt{9^2+1}, 9-2) = \boxed{(\sqrt{82}, 7)}$

b) Allgemeine Abbildungs/Funktionsvorschrift für $h_{1/2}$:

$\boxed{h_1(u)} = (f\circ g)(u) = f(g(u)) = f(\underbrace{\sqrt{u^2+1}}_{x}, \underbrace{u-2}_{y})$

$= \sqrt{u^2+1}^2 - (u-2)^2 = (u^2+1) - (u^2-4u+4)$

$= \cancel{u^2}+1-\cancel{u^2}+4u-4 = \boxed{4u-3}$

Test: (i) $h_1(3) = 4\cdot 3 - 3 = 12-3 = 9$ ✓

(ii) $h_1(-2) = 4\cdot(-2)-3 = -8-3 = -11$ ✓

$\boxed{h_2(x,y)} = (g\circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(\underbrace{x^2-y^2}_{=u})$

$= (\sqrt{\underbrace{(x^2-y^2)^2}_{=u^2}+1}, \underbrace{(x^2-y^2)}_{=u}-2) = \boxed{(\sqrt{(x^2-y^2)^2+1}, x^2-y^2-2)}$

Test: (iii) $\boxed{h_2(-1,2)} = (\sqrt{[\underbrace{(-1)^2-2^2}_{=1-4=-3}]^2+1}, (-1)^2-2^2-2) = (\sqrt{\underbrace{(-3)^2}_{9}+1}, -5)$

$= \boxed{(\sqrt{10}, -5)}$ ✓

(iv) $\boxed{h_2(5,4)} = \left(\sqrt{(\underbrace{5^2-4^2}_{=25-16=9})^2+1},\ 5^2-4^2-2\right) = \left(\sqrt{9^2+1},\ 25-16-2\right)$
$= \boxed{(\sqrt{82},\ 7)}$ ✓

Die Tests stimmen!

c) Untersuche f auf Surjektivität, g auf Injektivität:

(i) f surjektiv?

f ist surjektiv, falls $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$. Also ist zu fragen, ob zu jedem $u \in \mathbb{R}$ (mindestens) ein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert, so dass $\boxed{f(x,y) = u}$?

α) Fall $u \geq 0$: Dann ist $(\sqrt{u}, 0) \in f^{-1}(\{u\})$,
denn: $\boxed{f(\sqrt{u}, 0) = \sqrt{u}^2 - 0^2 = u}$ ✓

β) Fall $u < 0$: Dann ist $(0, \sqrt{u}) \in f^{-1}(\{u\})$
denn: $\boxed{f(0, \sqrt{u}) = 0^2 - \sqrt{u}^2 = -|u| = u}$

Wir haben konkret durch Angabe jeweils eines Urbildes zu $u \in \mathbb{R}$ beliebig gezeigt: $\boxed{f^{-1}(\{u\}) \neq \emptyset}$ für jedes $u \in \mathbb{R}$.

Damit gilt: f ist surjektiv.

(ii) g injektiv?

g ist injektiv, falls für $u, u' \in \mathbb{R}$ beliebig gilt:

$$u \neq u' \Rightarrow g(u) \neq g(u')$$

bzw. $\boxed{g(u) = g(u') \Rightarrow u = u'}$

= Pk. 6 =

Konkret:

$$g(u) = (\sqrt{u^2+1}, u-2) \overset{!}{=} g(u') = (\sqrt{u'^2+1}, u'-2)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} (1)\ \sqrt{u^2+1} = \sqrt{u'^2+1} \\ (2)\ u-2 = u'-2 \end{array}}$$ // Koeffizientenvergleich!

Aus (2) folgt insbesondere:

$$(2)\ u-2 = u'-2 \underset{+2}{\Longrightarrow} u = u'$$

Also haben wir gezeigt:

$$g(u) = g(u') \Longrightarrow u = u'$$

. Damit ist g injektiv!

Bemerkung: Widerlegen würde man Injektivität durch Angabe eines expliziten Gegenbeispiels mit $u \neq u'$, aber $g(u) = g(u')$!!
Analog würde man Surjektivität durch Angabe eines Gegenbeispiels $u \in \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(\{u\}) = \emptyset$!!

---

③ $f: D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x^3-3}{3x^3-2} = y$

a) (i) D_f bestimmen:

$$x \in D_f \Leftrightarrow 3x^3 - 2 \neq 0 \underset{+2}{\Leftrightarrow} 3x^3 \neq 2 \underset{:3}{\Leftrightarrow} x^3 \neq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x \neq \sqrt[3]{2/3}} \Longrightarrow \boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2/3}\}}$$

(ii) Ableitung $f'(x)$ berechnen:

= Pk. 7 =

$$f(x)=\frac{4x^3-3}{3x^3-2} \Rightarrow f'(x)=\frac{(4x^3-3)'\cdot(3x^3-2)-(4x^3-3)\cdot(3x^3-2)'}{(3x^3-2)^2}$$ (Q.R.)

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)}=\frac{12x^2\cdot(3x^3-2)-(4x^3-3)\cdot 9x^2}{(3x^3-2)^2}=\frac{\cancel{36x^5}-24x^2-\cancel{36x^5}+27x^2}{(3x^3-2)^2}$$

$$=\boxed{\frac{3x^2}{(3x^3-2)^2}}$$

b) Umkehrfunktion $f^{-1}: D_{f^{-1}} \to \mathbb{R}$ zu f:

Ansatz: $y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow \boxed{x=f(y)=\frac{4y^3-3}{3y^3-2}}$ // nach „y" auflösen

$$\underset{\cdot(3y^3-2)}{\Leftrightarrow} x(3y^3-2)=4y^3-3 \Leftrightarrow 3xy^3-2x=4y^3-3$$

$$\underset{-4y^3+2x}{\Leftrightarrow} 3xy^3-4y^3=y^3(3x-4)\overset{!}{=}2x-3$$

$$\underset{:(3x-4)}{\Leftrightarrow} y^3=\frac{2x-3}{3x-4} \underset{\sqrt[3]{\ }}{\Leftrightarrow} \boxed{y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{2x-3}{3x-4}}}$$

Probe: z.z.: $(f\circ f^{-1})(x)=x \quad (x\in D_{f^{-1}})$

Es gilt:

$$\boxed{(f\circ f^{-1})(x)}=f(\underbrace{f^{-1}(x)}_{=y})=\frac{4y^3-3}{3y^3-2}\Bigg|_{y=\sqrt[3]{\frac{2x-3}{3x-4}}}=\frac{4\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{2x-3}{3x-4}}\right)^3-3}{3\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{2x-3}{3x-4}}\right)^3-2}$$

$$\underset{\sqrt[3]{u}^3=u}{=}\frac{4\cdot\frac{2x-3}{3x-4}-3}{3\cdot\frac{2x-3}{3x-4}-2} \underset{\cdot\frac{(3x-4)}{(3x-4)}}{=} \frac{4(2x-3)-3(3x-4)}{3(2x-3)-2(3x-4)}$$

$$\Rightarrow (f\circ f^{-1})(x) = \frac{8x-\cancel{12}-9x+\cancel{12}}{\cancel{6x}-9-\cancel{6x}+8} = \frac{-x}{-1} = +x = id(x)$$

Fazit: Probe bestanden. Daher ist „sicher"

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2x-3}{3x-4}}$$ die Umkehrfkt zu

$$x = f(y) = \frac{4y^3-3}{3y^3-2}.$$

c) $(f^{-1})'(x)$ berechnen:

(i) direkt:

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2x-3}{3x-4}} = \left(\frac{2x-3}{3x-4}\right)^{1/3}$$

$$\underset{(KR)}{\Longrightarrow} \boxed{(f^{-1}(x))'} = \underbrace{(u^{1/3})'}_{\text{äußere Abl.}}\Big|_{u=\frac{2x-3}{3x-4}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{innere Abl.}}}{u'} = \frac{1}{3}u^{-2/3}\Big|_{u=\frac{2x-3}{3x-4}} \cdot u'$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\underbrace{\frac{2x-3}{3x-4}}_{=u}\Big)^{-2/3} \cdot \Big(\underbrace{\frac{2x-3}{3x-4}}_{=u}\Big)' = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{2x-3}{3x-4}\right)^{+2/3}} \cdot \left(\frac{2x-3}{3x-4}\right)'$$

$$\underset{(QR)}{=} \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-4)^{2/3}}{(2x-3)^{2/3}}\cdot\frac{(2x-3)'(3x-4)-(2x-3)(3x-4)'}{(3x-4)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-4)^{2/3}}{(2x-3)^{2/3}}\cdot\frac{2(3x-4)-(2x-3)\cdot 3}{(3x-4)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-4)^{2/3}}{(2x-3)^{2/3}}\cdot\frac{\cancel{6x}-8-\cancel{6x}+9}{(3x-4)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(3x-4)^{2/3}}{(2x-3)^{2/3}}\cdot\frac{1}{(3x-4)^2} \underset{(PG)}{=} \boxed{\frac{1}{3\cdot(2x-3)^{2/3}\cdot(3x-4)^{4/3}}}$$

(ii) via Ableitungsformel für f^{-1}:

– Pk. 9 –

Nach Skript gilt:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)\big|_{y=f^{-1}(x)}} = \frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(x)}_{=y})}.$$

Konkret:

$$\boxed{f'(y) = \frac{3y^2}{(3y^3-2)^2}}$$ siehe Teil (a) (ii) !!

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)\big|_{y=f^{-1}(x)}} = \frac{1}{\frac{3y^2}{(3y^3-2)^2}\Big|_{y=\sqrt[3]{\frac{2x-3}{3x-4}}}}$$

$$= \frac{(3y^3-2)^2}{3y^2}\Big|_{y=\left(\frac{2x-3}{3x-4}\right)^{1/3}} = \frac{\left\{3\cdot\left[\left(\frac{2x-3}{3x-4}\right)^{1/3}\right]^3-2\right\}^2}{3\cdot\left\{\left(\frac{2x-3}{3x-4}\right)^{1/3}\right\}^2}$$

$$= \frac{\left\{3\cdot\frac{2x-3}{3x-4}-2\right\}^2}{3\cdot\left(\frac{2x-3}{3x-4}\right)^{2/3}} = \frac{\left\{\frac{6x-9}{3x-4}-\frac{2(3x-4)}{3x-4}\right\}^2}{3\cdot\frac{(2x-3)^{2/3}}{(3x-4)^{2/3}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\cancel{6x}-9\cancel{-6x}+8}{(3x-4)}\right)^2}{\frac{3\cdot(2x-3)^{2/3}}{(3x-4)^{2/3}}} = \frac{(-1)^2}{(3x-4)^2}\cdot\frac{(3x-4)^{2/3}}{3\cdot(2x-3)^{2/3}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{3\cdot(2x-3)^{2/3}\cdot(3x-4)^{4/3}}}$$ ✓

Es kommt in beiden Fällen dasselbe heraus!

ENDE der Probeklausur !