WiSe 2016/17

Lösungsskizzen zur Probeklausur zu „Mathe I für BFen“

① (a) (i) $x = (2BA)_{13}$:

	2	11	10
·13	0	26	481
+	2	37	491

$\Rightarrow \boxed{x = (2BA)_{13} = (491)_{10}}$

Probe:

x	DIV 13	MOD 13
491	37	10 ≙ A
37	2	11 ≙ B
2	0	2

$\Rightarrow x = (491)_{10} = (2BA)_{13}$ ✓

(ii) $x = (4.506)_7$:

	4	5	0	6
·7	0	28	231	1.617
+	4	33	231	1.623

$\Rightarrow \boxed{x = (4.506)_7 = (1.623)_{10}}$

Probe:

x	DIV 7	MOD 7
1.623	231	6
231	33	0
33	4	5
4	0	4

$\Rightarrow x = (1623)_{10} = (4.506)_7$ ✓

(iii) $x = (11.010.101.001)_2$:

	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
·2	0	2	6	12	26	52	106	212	426	852	1.704
+	1	3	6	13	26	53	106	213	426	852	1.705

$\Rightarrow \boxed{x = (11.010.101.001)_2 = (1.705)_{10}}$

Probe:

x	DIV 2	MOD 2
1.705	852	1
852	426	0
426	213	0
213	106	1
106	53	0
53	26	1

x	DIV 2	MOD 2
26	13	0
13	6	1
6	3	0
3	1	1
1	0	1

$\Rightarrow x = (1.705)_{10} = (11.010.101.001)_2$ ✓

① (b) $\boxed{x = (\underbrace{11}_{3}.\underbrace{010}_{2}.\underbrace{101}_{5}.\underbrace{001}_{1})_2 = (3.251)_8 = (6A9)_{16}}$

Über den Gruppen: 6, 10, 9

② Gesetz: $\boxed{Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\lambda t}}$ mit $Q_0 = Q(0)$, $\lambda > 0$

Gegeben: $Q(10) = 0{,}03\,[C]$, $Q(18) = 0{,}02\,[C]$.

a) Gesucht: $\lambda > 0$ (gerundet auf 4 Nachkommastellen), $Q_0 = Q(0)$

Ansatz: (1) $Q(10) = Q_0 \cdot e^{-10\lambda} \overset{!}{=} 0{,}03$

(2) $Q(18) = Q_0 \cdot e^{-18\lambda} \overset{!}{=} 0{,}02$

$$\frac{(1)}{(2)}: \quad \frac{Q(10)}{Q(18)} = \frac{\cancel{Q_0} \cdot e^{-10\lambda}}{\cancel{Q_0} \cdot e^{-18\lambda}} = e^{-10\lambda+18\lambda} = e^{+8\lambda} \overset{!}{=} \frac{0{,}03}{0{,}02} = 1{,}5 = \frac{3}{2}$$

$$\overset{\ln(\,)}{\Longrightarrow} \ln(e^{8\lambda}) = 8\lambda \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} = 8\lambda = \ln(3/2) = \ln 3 - \ln 2$$

$$\overset{:8}{\Longrightarrow} \boxed{\lambda = \frac{\ln(3/2)}{8}} = 0{,}05068\ldots \approx 0{,}0507$$

Einsetzen in Gleichung (1) liefert:

$$Q_0 \cdot e^{-10\lambda} = Q_0 \cdot e^{-10 \cdot \frac{\ln(3/2)}{8}} = Q_0 \cdot \big(\underbrace{e^{\ln(3/2)}}_{=3/2}\big)^{-\frac{10}{8}\,\frac{5}{4}} = 0{,}03$$

$$\overset{\cdot (3/2)^{+5/4}}{\Longrightarrow} \boxed{Q_0 = 0{,}03 \cdot (3/2)^{+5/4} = 0{,}03 \cdot 1{,}5^{1{,}25}}$$

$$= 0{,}04980\ldots \approx 0{,}05\,[C]$$

auf 2 Nachkommastellen gerundet.

Analog ergibt Einsetzen in (2):

$$Q_0 \cdot e^{-18\lambda} = 0{,}02 \Rightarrow Q_0 = e^{+18\lambda} \cdot 0{,}02 = 0{,}02 \cdot e^{\frac{18}{8} \cdot \ln(1{,}5)}$$

$$= 0{,}02 \cdot 1{,}5^{9/4} = 0{,}02 \cdot 1{,}5^{2{,}25}$$

$$\approx 0{,}04980\ldots \approx 0{,}05$$

(2) (a) Somit ergibt sich als Entladungsgesetz:

$$\boxed{Q(t) = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}0507 \cdot t}}$$

(b) Gesucht: $\tau > 0$ mit $Q(\tau) = \frac{1}{2} Q_0 = \frac{1}{2} \cdot Q(0)$

Also:

$$Q(\tau) = \boxed{Q_0 \cdot e^{-\lambda\tau} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \cdot Q_0} \quad \text{bzw. } Q(\tau) = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}0507\tau} = 0{,}025$$

$$\underset{:Q_0}{\Longrightarrow} e^{-\lambda\tau} = 1/2 \underset{\ln(\ldots)}{\Longrightarrow} -\lambda\tau = \ln(1/2) = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2 = -\ln 2$$

$$\underset{:(-\lambda)}{\Longrightarrow} \tau = \frac{-\ln 2}{-\lambda} = +\frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{\ln(3/2)} \cdot 8 = 8 \cdot \frac{\ln 2}{\ln 1{,}5}$$

$$= 13{,}6760\ [s] \approx 13{,}67\ [s]$$

auf die 1/100 Sek. genau!

(3) Löse: $3^{x+2} - 11 \cdot 2^x = 3^x + 2^{x+4}$ (*)

Zunächst gilt: $3^{x+2} - 11 \cdot 2^x = 3^x + 2^{x+4}$

$$\Longleftrightarrow 3^x \cdot \underset{9}{3^2} - 11 \cdot 2^x = 3^x + 2^x \cdot \underset{16}{2^4}$$

$$\Longleftrightarrow 9 \cdot 3^x - 11 \cdot 2^x = 3^x + 16 \cdot 2^x$$

$$\underset{-3^x + 11 \cdot 2^x}{\Longleftrightarrow} \boxed{8 \cdot 3^x = 27 \cdot 2^x}$$

$$\underset{\ln()}{\Longrightarrow} \ln(8 \cdot 3^x) = \ln 8 + x \cdot \ln 3 \overset{!}{=} \ln(27 \cdot 2^x) = \ln 27 + x \cdot \ln 2$$

$$\underset{-x \cdot \ln 2 - \ln 8}{\Longrightarrow} x \cdot \ln 3 - x \ln 2 = x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 27 - \ln 8$$

$$\underset{:(\ln 3 - \ln 2)}{\Longrightarrow} \boxed{x = \frac{\ln 27 - \ln 8}{\ln 3 - \ln 2} = 3}$$

Einsetzprobe:

$x = 3$ in (*) eingesetzt:

l.S.: $3^{x+2} - 11 \cdot 2^x = 3^{3+2} - 11 \cdot 2^3 = 3^5 - 11 \cdot 2^3 = 243 - \underbrace{11 \cdot 8}_{=88}$

$= 155$

r.S.: $3^x + 2^{x+4} = 3^3 + 2^{3+4} = 3^3 + 2^7 = 27 + 128 = 155$

$\Rightarrow x = 3$ ist Lösung von (*)

---

(4) Gegeben: $A = (-3, 5)$, $B = (-1, -5)$, $C = (1, -3)$

(a) $g = AC$: $y = g(x) = ax + b$ (Normalform)

mit $\boxed{a = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A}} = \dfrac{-3-5}{1-(-3)} = \dfrac{-8}{+4} = -2$

Punktrichtungsform:

$y = g(x) = a \cdot (x - x_A) + y_A = a(x - x_C) + y_C$

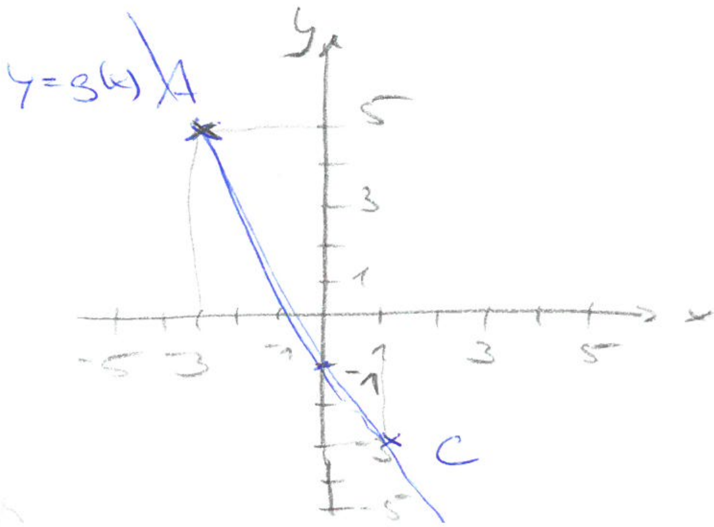
$= -2(x-(-3)) + 5 \qquad = -2(x-1) + (-3)$

$= -2(x+3) + 5 \qquad = -2(x-1) - 3$

bzgl. A $\qquad$ bzgl. C

$\Rightarrow y = g(x) = -2x - 6 + 5 = -2x + 2 - 3 = -2x - 1$

Normalform



(4) (b): Gesucht: $y = p(x) = ax^2 + bx + c$ mit B als Scheitelpunkt, C als Punkt auf der Parabel

Ansatz: Scheitelpunktform

$$\boxed{y = p(x) = a(x - x_B)^2 + y_B = a \cdot (x - (-1))^2 + (-5) = a(x+1)^2 - 5}\,.$$

Zusätzlich gilt:

$$y_C = p(x_C) \Leftrightarrow -3 = p(1) = a \cdot \underbrace{(1+1)^2}_{=2^2=4} - 5 = 4a - 5$$

$$\Rightarrow 4a = -3 + 5 = 2 \;\Rightarrow\; \boxed{a = 2/4 = \tfrac{1}{2}}$$

(+5) (:4)

$$\Rightarrow \boxed{y = p(x) = \tfrac{1}{2}(x+1)^2 - 5} \text{ Scheitelpunktform}$$

$$= \tfrac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - 5 = \tfrac{1}{2}x^2 + x + \tfrac{1}{2} - 5$$

$$\Rightarrow \boxed{y = p(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + x - \tfrac{9}{2}} \;\curvearrowright\; a = 1/2,\; b = 1,\; c = -9/2$$

Nullstellen:

Diskriminante Δ ergibt:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1/2 \cdot (-9/2) = 1 + \cancel{4} \cdot \frac{9}{\cancel{4}} = 10 > 0$$

$\Rightarrow$ 2 reelle Nullstellen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{\underbrace{2 \cdot 1/2}_{=1}} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = -1 + \sqrt{10} \approx 2{,}16\;;\; x_2 = -1 - \sqrt{10} \approx -4{,}16}$$

Vietaprobe: (i) $x_1 + x_2 = (-1 + \cancel{\sqrt{10}}) + (-1 - \cancel{\sqrt{10}}) = -2 \overset{!}{=} -\frac{b}{a}$

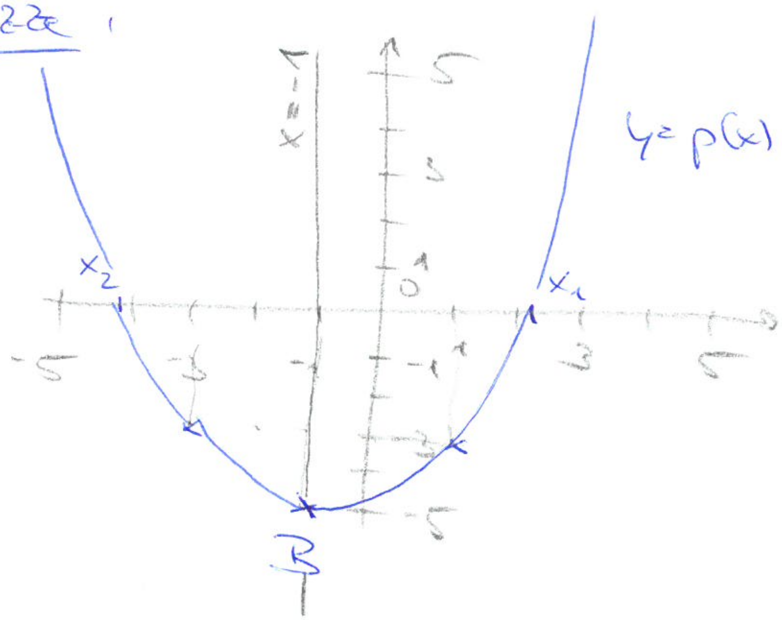
(ii) $x_1 \cdot x_2 = (-1 + \sqrt{10})(-1 - \sqrt{10}) = (-1)^2 - \sqrt{10}^2 \quad -1/\tfrac{1}{2} = -2$ ✓

$= 1 - 10 = -9 \overset{!}{=} c/a = \frac{-9/2}{1/2} = -\frac{9}{2} \cdot \frac{2}{1} = -9$ ✓

(4) (b). Als faktorisierte Darstellung ergibt sich dann:

$$\boxed{y = p(x) = a\cdot(x-x_1)(x-x_2)}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(x-(-1+\sqrt{10})\right)\left(x-(-1-\sqrt{10})\right)$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}(x+1-\sqrt{10})(x+1+\sqrt{10})}$$

Skizze:



(c): Schnittpunkte von $y=g(x)$ und $y=p(x)$ bestimmen

Ansatz:
$$y = g(x) = p(x)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{-2x-1 = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2}}$$
$$\overset{+2x+1}{\Leftrightarrow} \boxed{0 = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{7}{2}} \quad \rightsquigarrow \tilde{a} = 1/2,\ \tilde{b} = 3,\ \tilde{c} = -7/2$$
$$\overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 0 = x^2 + 6x - 7 \quad \rightsquigarrow p = 6,\ q = -7 \text{ Jetzt pq-Formel}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{(3)^2-(-7)} = -3 \pm \sqrt{9+7}$$
$$= -3 \pm \sqrt{16} = -3 \pm 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = -3+4 = 1},\ \boxed{x_2 = -3-4 = -7}$$

Probe: (i) $x_1 + x_2 = -6 \overset{!}{=} -\frac{b}{a} = -p$ ✓

(ii) $x_1 \cdot x_2 = -7 \overset{!}{=} \frac{c}{a} = q$ ✓

(4) $x_1 = 1$ liefert $y_1 = g(x_1) = g(1) = -2-1 = -3$

$\Rightarrow \boxed{S_1 = (1,-3) = C}$ ✓

$x_2 = -7$ liefert $y_2 = g(x_2) = g(-7) = -2(-7)-1 = 14-1 = 13$

$\Rightarrow \boxed{S_2 = (-7, 13)}$

(5) Gesucht: $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\begin{aligned} &(1)\quad x - y = 2 \\ &(2)\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{aligned}}$$

Aus (1) folgt durch Umstellung: $\boxed{y = x - 2}$

Das eingesetzt in (2) liefert:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 1 \iff \frac{1 \cdot (x-2) + 1 \cdot x}{x(x-2)} = 1$$

$$\iff \frac{x-2+x}{x(x-2)} = 1 \iff \frac{2x-2}{x(x-2)} = 1 \quad \overset{\cdot x(x-2)}{\iff}$$

$$2x - 2 = x(x-2) = x^2 - 2x$$

$$\overset{-2x+2}{\iff} \boxed{x^2 - 4x + 2 = 0}$$

Quadratische Gleichung mit $a=1, b=-4, c=2$

Diskriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8 > 0$$

$\Rightarrow$ 2 reelle Lösungen: $\sqrt{4 \cdot 2}$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = 2 + \sqrt{2}} \approx 3{,}41$; $\boxed{x_2 = 2 - \sqrt{2}} \approx 0{,}59$

5 Vietaprobe:

(i) $x_1 + x_2 = (2+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2}) = 4 \overset{!}{=} -\frac{b}{a}$ ✓

(ii) $x_1 \cdot x_2 = (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) = 4 - \underbrace{\sqrt{2}^2}_{2} = 2 \overset{!}{=} \frac{c}{a}$ ✓

~~Einsetzprobe: (1)~~

Dann folgt, eingesetzt in (1):

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 2 = (2+\sqrt{2}) - 2 = \sqrt{2} \\ y_2 &= x_2 - 2 = (2-\sqrt{2}) - 2 = -\sqrt{2} \end{aligned}}$$

Daraus ergeben sich folgende 2 Lösungspaare:

$\boxed{x_1 = 2+\sqrt{2},\ y_1 = \sqrt{2}}$ und $\boxed{x_2 = 2-\sqrt{2},\ y_2 = -\sqrt{2}}$

Einsetzprobe:

(1) $x_1 - y_1 = (2+\sqrt{2}) - \sqrt{2} = 2$ ✓ | $x_2 - y_2 = (2-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2$ ✓

(2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} =$

$$= \frac{(2-\sqrt{2})}{\underbrace{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}_{=4-2=2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \checkmark$$

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{(-\sqrt{2})} = \frac{2+\sqrt{2}}{\underbrace{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}_{=4-2=2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(2+\cancel{\sqrt{2}}) - \cancel{\sqrt{2}}}{2}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$