Letzte Vorlesung im WiSe 2016/17 vom 16.02.2017:

Thema: Probeklausur und „Tipps“

① (a)(i) $x = (2BA)_{13}$

$= (??)_{10}$

Horner:

	2	11 (B)	10 (A)
·13	0	26	481
+	2	37	491

$\Rightarrow x = (2BA)_{13} = (491)_{10}$

Probe:

x	DIV 13	MOD 13	
491	37	10	≙ A
37	2	11	≙ B
2	0	2	

Abbruch

$\Rightarrow x = (491)_{10} = (2BA)_{13}$ ✓

(ii) $x = (4.506)_7$

Horner:

	4	5	0	6
·7	0	28	231	1.617
+	4	33	231	1.623

Also:

$x = (4.506)_7 = (1.623)_{10}$

Probe:

x	DIV 7	MOD 7
1623	231	6
231	33	0
33	4	5
4	0	4

Abbruch

$\Rightarrow x = (1.623)_{10}$

$= (4.506)_7$ ✓

(iii) $x = (11.010.101.001)_2 = (1.705)_{10}$ // Horner

Probe:

x	DIV 2	MOD 2
1705	852	1
852	426	0
426	213	0
213	106	1
106	53	0
53	26	1

x	DIV 2	MOD 2
26	13	0
13	6	1
6	3	0
3	1	1
1	0	1

Abbruch

Also: $x = (1.705)_{10} = (11.010.101.001)_2$ ✓

(b) $\boxed{x = (\overbrace{11.0}^{6}\overbrace{10.1}^{10}\overbrace{01.001}^{9})_2 = (\underbrace{11}_{3}.\underbrace{010}_{2}.\underbrace{101}_{5}.\underbrace{001}_{1})_2 = (3.251)_8 = (6A9)_{16}}$

Beachte: $(1.001)_2 = 8+1 = 9$
$(1010)_2 = 8+2 = 10$

---

(2) Gegeben ist das Entladungsgesetz für einen Kondensator:

(*) $\boxed{Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\lambda t}}$ $(t \geq 0)$ mit $\lambda > 0$, $Q_0 = Q(0)$

Funktion Q in Abhängigkeit von t

Wir kennen: $Q(10) = 0{,}03\ [C]$, $Q(18) = 0{,}02\ [C]$

(a) Bestimme aus den bekannten Werten λ auf 4 Nachkommastellen gerundet und $Q_0 = Q(0)$ auf 2 Nachkommastellen gerundet und gebe $Q(t)$ konkret an.

Nebenbemerkung: Steht „auf 4 Nachkommastellen genau", dann sollte nach der 4. Stelle abgeschnitten werden!

Ansatz:
$$Q(10) \overset{(*)}{=} Q_0 \cdot e^{-10\lambda} \overset{!}{=} 0{,}03 \quad (1)$$
$$Q(18) = Q_0 \cdot e^{-18\lambda} = 0{,}02 \quad (2)$$

Tipp: Es ist oft „besser", den größeren der beiden rechten Werte durch den kleineren zu teilen (Später: Vorzeichen des ln) !

$$\frac{(1)}{(2)}: \quad \frac{Q(10)}{Q(18)} = \frac{\cancel{Q_0} e^{-10\lambda}}{\cancel{Q_0} \cdot e^{-18\lambda}} \overset{(PG)}{=} e^{-10\lambda-(-18\lambda)} = e^{-10\lambda+18\lambda}$$

$$= e^{8\lambda} \overset{!}{=} \frac{0{,}03}{0{,}02} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Also:

$$e^{8\lambda} = \frac{3}{2} \quad \overset{\ln()}{\Longrightarrow} \ln(e^{8\lambda}) = \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) = \ln 3 - \ln 2$$

$$\overset{(LG)}{\Longrightarrow} 8\lambda \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} = 8\lambda = \ln 3 - \ln 2$$

$$\overset{:8}{\Longrightarrow} \boxed{\lambda = \frac{\ln 3 - \ln 2}{8}} = \frac{\ln(3/2)}{8} = 0{,}05068\ldots \approx 0{,}0507$$

Für Q_0 setze $\boxed{\lambda = \frac{1}{8} \cdot \ln(3/2)} \approx 0{,}0507$ in eine der beiden Gleichungen (1) bzw. (2) ein. Z.B. in (1):

$$Q(10) = Q_0 \cdot e^{-10\lambda} = 0{,}03$$

$$\overset{:e^{-10\lambda}}{\Longrightarrow} Q_0 = \frac{0{,}03}{e^{-10\lambda}} = 0{,}03 \cdot e^{+10\lambda}$$

Beachte allgemein: $4^{-r} = \frac{1}{4^r}$

$$\Longrightarrow Q_0 = 0{,}03 \cdot e^{\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{8}_{4}} \cdot \ln(3/2)} = 0{,}03 \cdot \{e^{\ln(3/2)}\}^{5/4}$$

$$= 0{,}03 \cdot \{e^{\ln(1{,}5)}\}^{1{,}25} = 0{,}03 \cdot \boxed{1{,}5^{1{,}25}}$$

Taschenrechner!! $\boxed{x^y}$

$$= 0{,}04980\ldots \approx 0{,}05$$

Alternativ: $Q_0 = 0{,}03 \cdot e^{10\lambda} \approx 0{,}03 \cdot e^{0{,}507} = 0{,}04980\ldots \approx 0{,}05$

Dann erhält man für das Gesetz:

$$\boxed{Q(t) \approx 0{,}05 \cdot e^{-0{,}0507 \cdot t}}$$

Test: $Q(18) \approx 0{,}05 \cdot e^{-0{,}0507 \cdot 18} = 0{,}02007\ldots \approx 0{,}02$

(b) Gesucht: $\tau > 0$, so dass $\boxed{Q(\tau) = \frac{1}{2} Q_0 = \frac{1}{2} Q(0)}$

Ansatz: $\boxed{Q(\tau) = Q_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \cdot Q_0}$

??

$\overset{:Q_0}{\Longrightarrow} \; e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{Q_0}^{1}}{\cancel{Q_0}_{1}} = \frac{1}{2} \; \overset{\ln}{\Longrightarrow} \; -\lambda\tau = \ln(1/2) = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2$

$\Longrightarrow -\lambda\tau = -\ln 2 \; \overset{:(-\lambda)}{\Longrightarrow} \; \boxed{\tau = \frac{-\ln 2}{-\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$

Konkret mit $\lambda \approx 0{,}0507$:

$\boxed{\tau \approx \frac{\ln 2}{0{,}0507} = 13{,}67|15\ldots \approx 13{,}67}$ [sec]

„genau"

Achtung: Sind Zeiten in der Einheit min oder h (Stunden) gegeben und wird nach sec gefragt, sollte eine entsprechende Umrechnung in Sekundenanteile erfolgen!!

---

③ Löse die Potenzengleichung

(*) $\boxed{3^{x+2} - 11 \cdot 2^x = 3^x + 2^{x+4}}$

$\overset{(PG)}{\Longleftrightarrow} \; 3^x \cdot 3^2 - 11 \cdot 2^x = 3^x + 2^x \cdot 2^4 \Longleftrightarrow 9 \cdot 3^x - 11 \cdot 2^x = 3^x + 16 \cdot 2^x$

$\overset{+11 \cdot 2^x - 3^x}{\Longleftrightarrow} \; \underbrace{9 \cdot 3^x - 3^x}_{=(9-1) \cdot 3^x} = \boxed{8 \cdot 3^x \overset{!}{=} \underbrace{16 \cdot 2^x + 11 \cdot 2^x}_{=(16+11) \cdot 2^x} = 27 \cdot 2^x}$

$$\overset{\ln(\,)}{\Longrightarrow} \ln(8\cdot 3^x) = \ln(27\cdot 2^x)$$

$$\overset{(LG)}{\Longleftrightarrow} \ln 8 + \underbrace{x\cdot\ln 3}_{=\ln(3^x)} = \ln 27 + \underbrace{x\cdot \ln 2}_{=\ln(2^x)}$$

$$\overset{-\ln 8 - x\ln 2}{\Longrightarrow} x\cdot\ln 3 - x\cdot \ln 2 = x\cdot(\ln 3-\ln 2) \overset{!}{=} \ln 27 - \ln 8$$

$$\overset{:(\ln 3-\ln 2)}{\Longrightarrow} \boxed{x = \frac{\ln 27-\ln 8}{\ln 3 - \ln 2}} = \frac{\ln(27/8)}{\ln(3/2)} = \log_{3/2}\left(\frac{27}{8}\right)$$

$$= \log_{3/2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right] = 3\cdot \underbrace{\log_{3/2}(3/2)}_{} = 3$$

$\log_b b = 1$

Direkte Berechnung mit Taschenrechner ist o.k.

Probe: $x=3$ in (*) eingesetzt:

l.S.: $3^{x+2} - 11\cdot 2^x = 3^{3+2} - 11\cdot 2^3 = \underset{243}{3^5} - 11\cdot \underset{8}{2^3} = 243 - 88 = 155$

r.S.: $3^x + 2^{x+4} = 3^3 + 2^{3+4} = \underset{27}{3^3} + \underset{128}{2^7} = 27+128 = 155$ »Juchhu…«

---

(4) Gegeben die Punkte $A=(\overset{x_A}{-3},\overset{y_A}{5})$, $B=(-1,-5)$, $C=(\overset{x_C}{1},\overset{y_C}{-3})$

(a) Funktionsvorschrift (= affin lineare Fkt) für die Gerade $g=AC$:

Wähle Zweipunkteform:

$$y=g(x)=ax+b \quad \text{mit} \quad \boxed{\frac{y-y_C}{x-x_C} = \frac{y_A-y_C}{x_A-x_C} = a}$$

// Ergibt die Punktrichtungsform bezüglich $C=(x_C,y_C)$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{y-(-3)}{x-1} = \frac{5-(-3)}{-3-1} = \frac{5+3}{-3-1} = -\frac{8}{4} = -2 = a}$$

$\Longrightarrow$ $y+3 = a(x-1) = -2\cdot(x-1)$ $\Longrightarrow$ $y = g(x) = -2(x-1)-3$
$\cdot(x-1)$ $\quad -3$

Punktrichtungsform

$\Longrightarrow \boxed{y = g(x) = -2x+2-3 = -2x-1}$

Normalform $y = ax+b$

(b) Rekonstruktionsaufgabe für $y = p(x) = ax^2+bx+c$ in allen 3 Darstellungsformen.

Gegeben: $B = (-1,-5)$ ist Scheitelpunkt und $C = (1,-3)$ liegt auf der zugehörigen Parabel

Ansatz: Gehe von der Scheitelpunktform aus:

$$y = p(x) = a\cdot(x-x_S)^2 + y_S \quad \text{mit } x_S = x_B = -1, \; y_S = y_B = -5$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = p(x) = a\cdot(x+1)^2 - 5}$$

Zur Bestimmung von a verwende C:

$$y_C = -3 = p(x_C) = p(1) = a\cdot\underbrace{(1+1)^2}_{=2^2=4} - 5 = 4a-5$$

$$\underset{+5}{\Longrightarrow} 4a = -3+5 = 2 \underset{:4}{\Longrightarrow} \boxed{a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

Daraus ergibt sich die konkrete Scheitelpunktform

$$\boxed{y = p(x) = \frac{1}{2}\cdot(x+1)^2 - 5}$$

Ausklammern liefert die Normalform:

$$y = p(x) = \frac{1}{2}(x^2+2x+1) - 5 = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{10}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2} \quad = c = p(0)$$

Bleibt die faktorisierte Form via Nullstellen-bestimmung:

$$y = p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2} \overset{!}{=} 0$$

$\cdot 2$ $\Longrightarrow$ $\boxed{x^2 + 2x - 9 = 0}$

$p = 2 = b$
$q = -9 = c$
$a = 1$

$$\Longrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 4 + 36 = 40 > 0$$

$4 \cdot 10$

$\Longrightarrow$ 2 reelle Nullstellen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}^{1}(-1 \pm \sqrt{10})}{\cancel{2}_{1}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= -1 + \sqrt{10}, \\ x_2 &= -1 - \sqrt{10} \end{aligned}}$$

Vietaprobe durchführen!!

Vieta: (i) $x_1 + x_2 = (-1 + \cancel{\sqrt{10}}) + (-1 - \cancel{\sqrt{10}}) = -1 - 1 = -2 \overset{!}{=} -\frac{b}{a} = -p = -2$ ✓

(ii) $x_1 \cdot x_2 = \underbrace{(-1 + \sqrt{10})(-1 - \sqrt{10})}_{\text{3. Binom!!}}$

$$= (-1)^2 - \sqrt{10}^2 = 1 - 10 = -9 \overset{!}{=} \frac{c}{a} = q = -9 \checkmark$$

Also folgt mit den korrekt berechneten Nullstellen:

$$\boxed{y = p(x)} = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x - x_1)(x - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - (-1 + \sqrt{10})\right)\left(x - (-1 - \sqrt{10})\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x + 1 - \sqrt{10})(x + 1 + \sqrt{10})$$

faktorisierte Darstellung = Zerlegung in Linearfaktoren

(c) Schnittpunktberechnung für $y=g(x)$ und $y=p(x)$.

Ansatz: $y=g(x)=p(x)$

Beachte: $y=g(x)=-2x-1$, $y=p(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-2x-1}_{=g(x)}=\underbrace{\frac{1}{2}x^2+x-\frac{9}{2}}_{=p(x)}$$

$$\overset{+2x+1}{\Leftrightarrow} \boxed{0=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{7}{2}}$$

$$\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \boxed{0=x^2+6x-7}$$ quadratische Gleichung

$\tilde{a}=1$, $\tilde{b}=6$, $\tilde{c}=-7$ bzw. $\tilde{p}=6$, $\tilde{q}=-7$

Dann erhält man als Diskriminante:

$$\tilde{\Delta}=\tilde{b}^2-4\tilde{a}\tilde{c}=6^2-4\cdot1\cdot(-7)=36+28=64=8^2>0$$

Somit ergeben sich folgende zwei reelle Schnittstellen:

$$x_{1/2}=\frac{-\tilde{b}\pm\sqrt{\tilde{\Delta}}}{2\tilde{a}}=\frac{-6\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-6\pm8}{2}=-3\pm4$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1=+1,\ x_2=-7}$$ mit (i) $x_1+x_2=-6=-\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$ ✓

(ii) $x_1\cdot x_2=-7=\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}$ ✓

Einsetzen der gefundenen Schnittstellen $x_{1/2}$ in die affin lineare Fkt $y=g(x)=-2x-1$ liefert:

$$y_1=g(x_1)=g(1)=-2-1=-3 \Rightarrow S_1=(1,-3)=C,$$

$$y_2=g(x_2)=g(-7)=-2(-7)-1=14-1=13$$

Also ist $S_2=(-7,13)$ der gesuchte 2. Schnittpunkt der Geraden zu $y=g(x)=-2x-1$ mit der Parabel zu $y=p(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{9}{2}$.

Zu Aufgabe 5 schaue Musterlösung zur Probeklausur auf der Homepage zur „Mathematik für Berufliche Fachrichtungen".

ENDE der letzten Vorlesung! Allen potentiellen Teilnehmern der Prüfungsklausur viel Erfolg!!