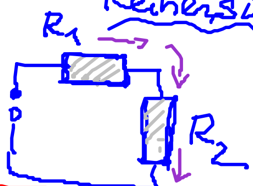
Vorlesung vom 09.02.2017:

- Die (verkappte) quadratische Gleichung in Textaufgaben

Dazu die Ü-Aufgaben 35 und 37:

(35) Aus der Physik/Elektrotechnik kennt man Parallel- und Reihenschaltung von Widerständen. Für den Gesamtwiderstand bzw. die Gesamtstromstärke gilt:

Reihenschaltung:



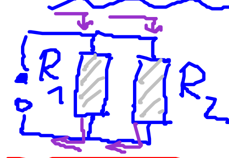
$$\boxed{R_{ges} = R_1 + R_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{I_{ges}} = \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}}$$

Ohmsches Gesetz:

$$\boxed{R = \frac{U}{I}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{I = \frac{U}{R}}$$

Parallelschaltung:



$$\boxed{I_{ges} = I_1 + I_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (*)$$

Bei Parallelschaltung folgt weiter:

$$(*) \Leftrightarrow R_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1 \cdot R_2 + 1 \cdot R_1}{R_1 \cdot R_2}} = \frac{1^{=\frac{1}{1}}}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}} = \frac{1}{1} \cdot \boxed{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (**)$$

In unserer Aufgabenstellung ist gegeben:

$$R_{ges} = 22{,}5\,[\Omega] \quad ; \quad R_1 - 60 = R_2 \Leftrightarrow \boxed{R_1 = R_2 + 60}$$

Für $\boxed{R_1 = x}$ erhalten wir dann als Gleichung $\boxed{R_2 = R_1 - 60 = x - 60}$

Einsetzen in die Gleichung (**) liefert:

$$R_{ges} = 22{,}5 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{x(x-60)}{x + (x-60)} = \frac{x^2 - 60x}{2x - 60}$$

$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{22{,}5 \cdot (2x-60)}_{=45x-1350} = x^2 - 60x \quad \Longleftrightarrow$ $\quad \cdot (2x-60) \qquad -45x+1.350$

$$\boxed{0 = x^2 - 105x + 1.350}$$ quadratische Gleichung

Koeffizienten: $a=1$, $b=-105$, $c=1.350$

Wir erhalten die Diskriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\underbrace{+105}_{})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1350 = 11.025 - 5.400$$

$$= (100+5)^2 = 100^2 + 2 \cdot 5 \cdot 100 + 5^2$$

$$= 5.625 = 75^2 > 0$$

Also ergeben sich rechnerisch folgende Lösungen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+105 \pm \sqrt{75^2}}{2 \cdot 1} = \frac{105 \pm 75}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 90 \\ x_2 = 15 \end{array}}$$

Vietatest: (i) $x_1 + x_2 = 105 \overset{!}{=} -\frac{b}{a} = +\frac{105}{1}$ ✓

(ii) $x_1 \cdot x_2 = 90 \cdot 15 = 1.350 \overset{!}{=} \frac{c}{a}$ ✓

Dann erhalten wir: $R_1 = x_1 = 90\,[\Omega] \Rightarrow R_2 = x_1 - 60 = 30\,[\Omega]$

bzw. $R_1 = x_2 = 15\,[\Omega] \Rightarrow R_2 = x_2 - 60 = -45\,[\Omega]$

Die Lösung $x=15$ ist unzulässig, da in diesem Fall $R_2 < 0$. Somit gibt es nur ein zulässiges Lösungspaar, nämlich $R_1 = 90\,[\Omega]$, $R_2 = 30\,[\Omega]$.

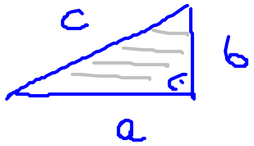
Wir machen noch die Einsetzprobe:

(1) $R_1 - R_2 = 90 - 30 = 60$ ✓

(2) (**) $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{90 \cdot 30}{90+30} = \frac{\cancel{2700}^{90}}{\cancel{120}_{4}} = 22{,}5 = R_{ges}$ ✓

Jetzt die geometrische Aufgabe

Ü 37: Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck:



Kathetenlängen: $a>0$, $b>0$ // Flächeninhalt:

Hypotenuse: $c>0$. $F=\frac{1}{2}a\cdot b$

Gegeben: (1) $a+b=42$ [cm]

(2) $F=\frac{a\cdot b}{2}=216$ [cm²]

Setzen wir $\boxed{b=x}$, so folgt mit (1): $\boxed{a=42-b=42-x}$.

Einsetzen in (2) ergibt:

$$F=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{(42-x)\cdot x}{2}=216$$

// „verkappte" quadr. Gleichung!

$$\Longleftrightarrow 42x-x^2=432=2\cdot 216 \Longleftrightarrow \boxed{0=x^2-42x+432}$$

$\cdot 2$ $-42x+x^2$

Mit Koeffizienten $\tilde{a}=1$, $\tilde{b}=-42$, $\tilde{c}=432$ folgt für die Diskriminante:

$$\Delta=\tilde{b}^2-4\tilde{a}\tilde{c}=(-42)^2-4\cdot 1\cdot 432=1.764-1.728=36>0$$

Somit erhalten wir rechnerisch 2 Lösungen für x.

$$x_{1/2}=\frac{-\tilde{b}\pm\sqrt{\Delta}}{2\tilde{a}}=\frac{+42\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{42\pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1=\frac{48}{2}=24,\quad x_2=\frac{36}{2}=18}$$

Vietatest: (1) $x_1+x_2=42\overset{!}{=}-\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$ ✓

(2) $x_1\cdot x_2=(21+3)(21-3)=21^2-3^2=441-9=432\overset{!}{=}\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}$ ✓

Als Lösungen für a, b erhalten wir:

(1) $b=x_1=24$ [cm] $\Rightarrow a=42-x_1=42-24$ [cm] $=18$ [cm]

(2) $b=x_2=18$ [cm] $\Rightarrow a=42-x_2=42-18$ [cm] $=24$ [cm]

Beide sind aber im Wesentlichen dieselbe Lösung, nur mit Vertauschung der Namen.

Einsetzprobe: (1) $a+b = 24+18 = 42$ ✓

(2) $F = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{24 \cdot \cancel{18}^{9}}{\cancel{2}_{1}} = 216$ ✓

Relevant für die Klausur sind als Themen:

- Umwandlung von Zahldarstellungen mit beliebiger Basis $b \geq 2$ ins Dezimalsystem und umgekehrt; speziell: Oktal- und Hexadezimaldarstellung
- Exponentialfkt. und Logarithmus in Anwendungsaufgaben
- Potenzengleichungen lösen unter Beachtung von Potenz- und Logarithmengesetzen
- Affin lineare und quadratische Fkten zur Beschreibung von Geraden und Parabeln → verschiedene Darstellungsformen: Normalform, Punktrichtungsform, Scheitelpunktform, faktorisierte Form
- Quadratische Gleichung in „verkappter" Form in Anwendungsaufgaben.

Dann viel „Spaß" mit der Probeklausur...

ENDE der Vorlesung!!