Vorlesung vom 02.02.2017:

„Anwendungsaufgaben zur quadratischen Fkt. bzw. quadratischen Gleichung"

Zur Vorbereitung für folgende Aufgaben:

Die quadratische Funktion in diversen Formen:

(A) die Normalform: $\boxed{y = p(x) = ax^2 + bx + c}$ mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

(B) die Scheitelpunktform: $\boxed{y = p(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S}$ mit Scheitelpunkt $S(x_S, y_S)$ und Symmetrieachse $x = x_S$

(C) die faktorisierte Form (= Zerlegung in Linearfaktoren):
$\boxed{y = p(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)}$ mit reellen Nullstellen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Beachte: (C) existiert nur, wenn es reelle Nullstellen gibt!!

Formeln zur Nullstellenberechnung:

(D) abc-Formel: (*) $\boxed{x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$ für $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac \geq 0}$ Diskriminante

Test mit Vieta: $\boxed{\begin{array}{l} (1)\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ (2)\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}}$ // Vieta-probe

(E) pq-Formel: Wegen $y = p(x) = ax^2 + bx + c = 0$

$\overset{:a}{\iff}$ $\boxed{x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0}$ $\left(-\dfrac{0}{a}\right)$

überführt die Substitution (= Ersetzung) $\boxed{p = \dfrac{b}{a}, q = \dfrac{c}{a}}$

(*) in: $\boxed{x_{1/2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}}$ mit der Probe:

(1) $x_1 + x_2 = -p$

$(2)\ x_1 \cdot x_2 = q$

Das nun in Aufgabe 32 angewendet:

(32) Ü(a): Rekonstruiere die quadratische Funktion $y = p(x)$, wenn für die zugehörige Parabel als Graph von p vorgegeben ist:

(i) Nullstellen in $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

(ii) Schnittpunkt mit y-Achse: $S(x_0, y_0) = (0, 2)$ — $x_0 = 0$: y-Achse

Wegen Vorgabe (i) bietet sich die faktorisierte Form (C) als Ansatz an:

$$\boxed{y = p(x) = \overset{??}{a} \cdot (x - \underset{-1}{x_1})(x - \underset{3}{x_2}) = a \cdot (x \underset{=-(-1)}{+} 1)(x - 3)} \quad (*)$$

Wegen (ii) muss gelten: $\boxed{y_0 = 2 = p(\underset{x_0}{0})} \overset{(*)}{=} a \cdot \underbrace{(0+1)}_{=1}\underbrace{(0-3)}_{=-3} = -3a$

Also: $2 = -3a \overset{:(-3)}{\Longrightarrow} \boxed{a = -\frac{2}{3}}$

Somit lautet die faktorisierte Form von $y = p(x)$:

$$(C)\ \boxed{y = p(x) = -\frac{2}{3} \cdot (x+1)(x-3)}$$

NR: $(x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$

Ausklammern liefert die Normalform:

$$(A)\ \boxed{y = p(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2}$$

Zur Ermittlung der Scheitelpunktform führen wir nun für (A) die quadratische Ergänzung durch:

$$y = p(x) = \underbrace{-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x}_{} + 2 = -\frac{2}{3} \cdot \boxed{(x^2 - 2x\ )} + 2$$

unvollst. Binom!!

$$= -\frac{2}{3}\left\{(x-1)^2 - 1^2\right\} + 2 = -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \underbrace{\frac{2}{3} + 2}_{= 8/3}$$

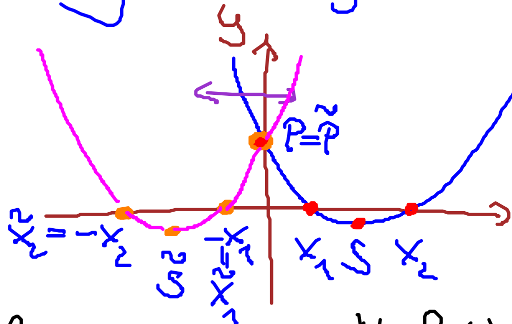
Also erhalten wir:

(B) $y = p(x) = a(x-x_S)^2 + y_S = -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \frac{8}{3}$

mit Scheitelpunkt $S(x_S, y_S) = (1, \frac{8}{3})$

Zusätzlich gesucht: Die Funktionsvorschrift $y = q(x)$ für die Parabel, die aus der Parabel zu $y = p(x)$ durch Spiegelung an der y-Achse entsteht:

$y = q(x)$



$y = p(x)$

Es gilt folgender Zusammenhang (allgemein):

(**) $\boxed{y = q(x) = p(-x)}$

Spiegelung an y-Achse überführt x in $-x$, kurz: $x \mapsto -x$

(**) angewendet auf die Normalform (A) $y = p(x) = -\frac{2}{3}\underset{u}{x}^2 + \frac{4}{3}\underset{u}{x} + 2$

liefert als Normalform für $y = q(x)$:

$$\boxed{y = q(x) = p(\overset{u}{-x})} = -\frac{2}{3}(-x)^2 + \frac{4}{3}(-x) + 2 = \boxed{-\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2}$$

Substitution $\quad -\frac{2}{3}u^2 + \frac{4}{3}u + 2$

Neuer Aufgabentyp:

(33) Ü(b): Man löse $\frac{3}{x-2} + \frac{8}{3x-4} = \frac{19}{2x+1}$ (*) unter Beachtung der Termodynamik:

NR-Ecke:

$x-2$

$3x-4$

HN: $(x-2)(3x-4)$

Es gilt:

l.S.: $\frac{3}{x-2} + \frac{8}{3x-4} = \frac{3\cdot(3x-4) + 8(x-2)}{(x-2)(3x-4)}$

$= \frac{9x-12+8x-16}{(x-2)(3x-4)} = \frac{17x-28}{(x-2)(3x-4)}$

(*) $\iff \frac{17x-28}{(x-2)(3x-4)} = \frac{19}{2x+1} \iff (17x-28)\cdot(2x+1) = 19(x-2)(3x-4)$

$\cdot (x-2)(3x-4)\cdot(2x+1)$

$\Longleftrightarrow 34x^2+17x-56x-28 = 19(3x^2-4x-6x+8)$

$\Longleftrightarrow 34x^2-39x-28 = 57x^2-190x+152$

$\Longleftrightarrow$ $-34x^2+39x+28$ $\boxed{0=23x^2-151x+180}$ quadratische Gleichung mit $a=23$, $b=-151$, $c=180$

Mit $\Delta = b^2-4ac = (-151)^2-4\cdot 23\cdot 180 = 6241 = 79^2 > 0$

erhält man folgende 2 reelle Lösungen:

$$x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+151\pm\sqrt{79^2}}{46} = \frac{151\pm 79}{46}$$

$$\Longrightarrow \| x_1 = \frac{151+79}{46} = \frac{230}{46} = 5 \|, \quad \| x_2 = \frac{151-79}{46} = \frac{72}{46} = \frac{36}{23} \|$$

Vieta-Probe: (1) $x_1+x_2 = 5+\frac{36}{23} = \frac{115+36}{23} = \frac{151}{23} \overset{!}{=} -\frac{b}{a} = \frac{+151}{23}$ ✓

(2) $x_1\cdot x_2 = 5\cdot\frac{36}{23} = \frac{180}{23} \overset{!}{=} \frac{c}{a} = \frac{180}{23}$ ✓

Zumindest wissen wir jetzt, dass wir die richtigen Lösungen für die quadratische Gleichung $\| 23x^2-151x+180=0 \|$ gefunden haben. Durch Einsetzprobe müssen wir nun noch testen, ob durch $x_1=5$ und $x_2=\frac{36}{23}$ auch die Ausgangsgleichung gelöst wird:

(i) $x_1=5$: $\quad$ l.S. $\frac{3}{x_1-2}+\frac{8}{3x_1-4} = \frac{3}{5-2}+\frac{8}{15-4} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}+\frac{8}{11} = \frac{11+8}{11} = \frac{19}{11}$

r.S. $\frac{19}{2x_1+1} = \frac{19}{10+1} = \frac{19}{11}$ ✓

(ii) $x_2 = \frac{36}{23}$: l.S. $\frac{3}{x_2-2} + \frac{8}{3x_2-4} = \frac{3}{\frac{36}{23}-2} + \frac{8}{3\cdot\frac{36}{23}-4} = \frac{3}{\frac{36-46}{23}} + \frac{8}{\frac{108-92}{23}}$

$$= \frac{3}{\frac{-10}{23}} + \frac{8}{\frac{16}{23}} = -3\cdot\frac{23}{10} + \overset{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{23}{\underset{2}{\cancel{16}}}\cdot\frac{5}{5}$$

$$= \frac{-69+115}{10} = \frac{46}{10} = \frac{23}{5} \checkmark$$

r.S. $\frac{19}{2x_2+1} = \frac{19}{2\cdot\frac{36}{23}+1} = \frac{19}{\frac{72+23}{23}} = \frac{19}{\frac{95}{23}} = \overset{1}{\cancel{19}}\cdot\frac{23}{\underset{5}{\cancel{95}}} = \frac{23}{5}$

Probe hat in beiden Fällen geklappt. Also haben wir zwei reelle Lösungen der Ausgangsgleichung: $\boxed{x_1 = 5,\ x_2 = \frac{36}{23}}$.

ENDE der Vorlesung !!