Vorlesung vom 26.01.2017:

- Quadratische Funktionen (= Polynome vom Grad $n=2$) und Parabeln
- Verschiedene Darstellungsformen
- Lösung(en) einer quadratischen Gleichung

---

1) Polynome vom Grad $n=2$ bzw. „quadratische" Funktion:

Letzte Woche: Affin lineare Funktion $\boxed{y=g(x)=bx+c}$ g: Gerade

Parameter: $b=\tan\alpha$ beschreibt die Steigung der Geraden, welche durch die Funktionsvorschrift $y=g(x)$ beschrieben wird.

$c=g(0)$ Funktionswert an der Stelle $x=0$ ist y-Achsenabschnitt zur Geraden = Schnittpunkt $S(0,c)$ mit y-Achse.

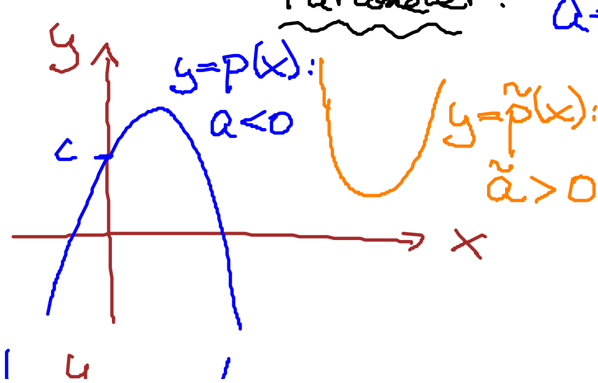
Punktrichtungsform: $\boxed{y=g(x)=b\cdot(x-x_0)+y_0}$ mit

$g(x_0)=y_0$ beschreibt die Gerade, auf welcher der Punkt $P(x_0,y_0)$ liegt mit Steigung (= Richtung) $b=\tan\alpha$ mit Steigungswinkel $\alpha\in\mathbb{R}$.

Nun neu: Quadratische Funktion $\boxed{y=p(x)=ax^2+bx+c}$ p: Parabel

mit Koeffizienten $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$

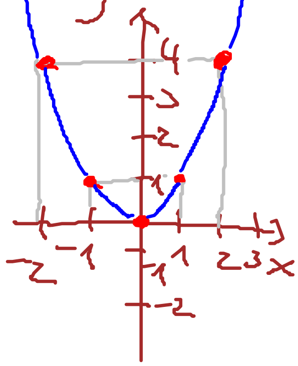
Parameter: $a\neq 0$ beschreibt die „Öffnung" der zugehörigen Parabel, welche durch Funktionsvorschrift $y=p(x)$ beschrieben wird.



Dabei gilt:

$a>0 \Rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet,

$a<0 \Rightarrow$ — " — nach unten — " —.



Je größer $|a|$, desto „schmaler" ist die Parabel. Je kleiner $|a|$, desto „breiter" die Parabel.

„Normalparabel": $a=1$, $b=c=0$, d.h.: $y=p(x)=x^2$

$p(0)=0$, $p(\pm 1)=(\pm 1)^2=1$, $p(\pm 2)=$

$c=p(0)$ Funktionswert für $x=c$ liefert den Schnittpunkt $S(0,c)$ der Parabel mit der y-Achse.

---

2) Verschiedene Darstellungen der quadratischen Funktion:

A) Allgemeine Form = Normalform:

$$\boxed{y=p(x)=ax^2+bx+c}$$

Affin linear:

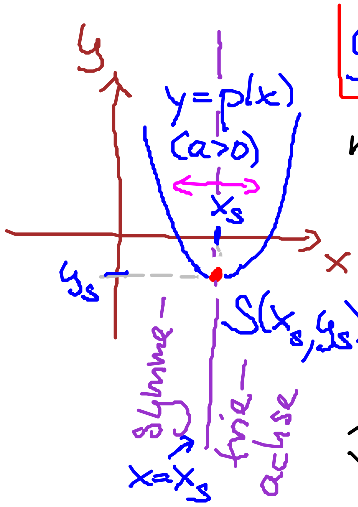
$a=0$: $y=g(x)=bx+c$

Punktrichtungsform:

$y=g(x)=b(x-x_0)+y_0$ mit $y_0=g(x_0)$

B) Scheitelpunktform:

$$\boxed{y=p(x)=a\cdot(x-x_s)^2+y_s}$$



mit $y_s=p(x_s)$ liefert den Scheitelpunkt $S(x_s,y_s)$ der auf der Parabel den „höchsten" Punkt (=Maximum) im Fall $a<0$ bzw. den „tiefsten" Punkt (=Minimum) im Fall $a>0$ darstellt.

Denn z.B. für $a>0$ gilt:

$$y=p(x)=\underbrace{\underbrace{a}_{>0}\cdot\underbrace{(x-x_s)^2}_{\geq 0}}+y_s \geq y_s=p(x_s)$$

<u>Beachte</u>: Man kann ($a>0$) aus der Normalform die Scheitelpunktform mittels quadratischer Ergänzung gewinnen.

Zudem stellt die (vertikale) Gerade $x=x_S$ die Symmetrieachse der durch $y=p(x)$ beschriebenen Parabel dar.

c) Faktorisierte Form = Zerlegung in Linearfaktoren:

$$\boxed{y=p(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$$, wobei gilt:

$y=p(x_1)=p(x_2)=0$. Damit sind $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ die – möglicherweise nicht existenten – Nullstellen der quadratischen Funktion $y=p(x)$. Also sind $N_1(x_1,0)$ und $N_2(x_2,0)$ die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse.

Man gewinnt die Nullstellen x_1, x_2 mithilfe der abc-Formel aus der Normalform

(*) $$\boxed{x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$$, wobei $\boxed{\Delta := b^2-4ac}$ die sogenannte Diskriminante ist.

Fälle wegen $\sqrt{\Delta}$:

(i) $\Delta>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}>0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ existieren

Wichtig:

(ii) $\Delta = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ liefert doppelte Nullst.

(iii) $\Delta < 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}$ ist in $\mathbb{R}$ nicht definiert $\Rightarrow$ keine reelle Nullst.

Wir leiten die Formel (*) einmal her:

Trick: „quadr. Erg."

$$y = p(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{Normalform}} \overset{!}{=} 0 \quad \text{// Nullstellengleichung}$$

$$\overset{:a}{\Longleftrightarrow} \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \overset{-\frac{c}{a}}{\Longleftrightarrow} \quad \boxed{x^2 + \frac{b}{a}x} = -\frac{c}{a}$$

unvollst. 1. Binom

$$\overset{\text{quad. Erg.}}{\Longleftrightarrow} \quad \boxed{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = -\frac{c}{a} \quad \overset{+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{\Longleftrightarrow} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$(u+v)^2 - v^2 = u^2 + 2uv$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} = \frac{b^2 - 4a \cdot c}{4a^2}} = \boxed{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$\Delta := b^2 - 4ac$

Gleichung widersprüchlich, wenn $\Delta < 0$

Im Fall $\Delta \geq 0$ folgt durch Radizieren:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\overset{-\frac{b}{2a}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Nun folgt aus der abc-Formel:

(1) $\boxed{x_1 + x_2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \boxed{-\frac{b}{a}}$

(2) $\boxed{x_1 \cdot x_2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{\ldots} = (-b)^2 - \sqrt{\Delta}^2$ 3. Binom!

$$= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4ac}}{\cancel{4a^2}} = \boxed{\frac{c}{a}}$$

$\Delta = b^2-4ac$

Das sind die Formeln von Vieta:

$$\boxed{\begin{aligned} (1)\quad & x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \\ (2)\quad & x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{aligned}}$$

Liefert einen Nullstellentest

Es folgt dann:

$$\boxed{a\cdot(x-x_1)(x-x_2)} = a\cdot(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2)$$

$$= ax^2 - a\cdot(\underbrace{x_1+x_2}_{(1)})x + a\underbrace{x_1x_2}_{(2)}$$

Vieta

$$= ax^2 - \cancel{a}\cdot\left(-\frac{b}{\cancel{a}}\right)x + \cancel{a}\cdot\frac{c}{\cancel{a}}$$

$$= \boxed{ax^2+bx+c = p(x)}$$

Das ist die Zerlegung in Linearfaktoren bzw. faktorisierte Form!

Damit verschieben wir die Abgabe der Hausaufgabe 31 H(c) um eine Woche auf 07.02./09.02. Zusammen mit den Hausaufgaben 32 H(c) und 33 H(d).

Die Textaufgaben Ü34, Ü35 und H36 „wandern" auf das Aufgabenblatt 14 !!

ENDE der Vorlesung !!