Vorlesung vom 19.01.2017:

- Affin lineare Funktionen als Beschreibung von Geraden im $\mathbb{R}^2$
- Quadratische Polynome als Beschreibung von Parabeln im $\mathbb{R}^2$

1) Affin lineare Funktionen bzw. Polynome vom Grad ≤ 1:

Es geht darum, Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ mittels einer Funktionsgleichung der Form

Punkte mit Koordinaten x,y (kartesischen)

$$\boxed{y = g(x),\ x \in \mathbb{R}}$$

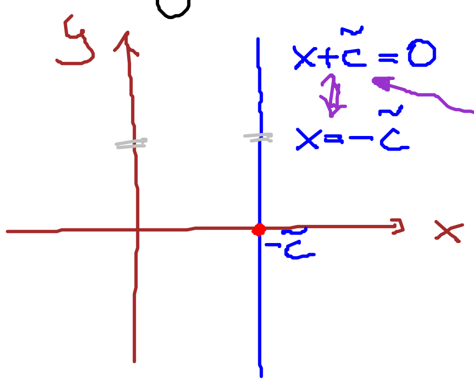
mittels Funktionsvorschrift zu beschreiben.

Die allgemeinste Gleichung – genauer: implizite Gleichung – zur Beschreibung einer Geraden lautet:

$$(*)\quad \boxed{g:\ \tilde{a}x + \tilde{b}y + \tilde{c} = 0}$$

zu $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ fest gewählt, wobei $\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 > 0$

D.h.: $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ dürfen nicht gleichzeitig verschwinden.



Hier: $\tilde{a} = 1, \tilde{b} = 0$

Falls $\boxed{\tilde{b} \neq 0}$ ist, lässt sich die lineare Gleichung $(*)$, wie folgt, nach y auflösen:

$$\tilde{a}x + \tilde{b}y + \tilde{c} = 0 \overset{-\tilde{a}x - \tilde{c}}{\Longleftrightarrow} \tilde{b}y = -\tilde{a}x - \tilde{c} \overset{:\tilde{b}}{\Longleftrightarrow} \boxed{y = -\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}x - \frac{\tilde{c}}{\tilde{b}} \overset{!}{=} ax + b}\ ,$$

wobei $a := -\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}},\ b := -\frac{\tilde{c}}{\tilde{b}} \in \mathbb{R}$

Wir gewinnen so die sogenannte **affin lineare Funktion** $\boxed{y = f(x) = ax + b}$.

f ist quasi – anders gedeutet – ein Polynom vom Grad $= 1$ für $a \neq 0$ und vom Grad $= 0$ für $a = 0$ und $b \neq 0$.

Sonderfall: Nullpolynom für $a = b = 0$: $\boxed{y = f(x) \equiv 0}$ konstant gleich

Die Geraden-(Funktions)gleichung

$y = f(x) = ax + b$ heißt auch die Normalform der dadurch beschriebenen Geraden.

Beachte: $y_0 = \underline{f(0)} = a\cdot 0 + b = \underline{b}$ ist der y-Achsenabschnitt zur Geraden.

Also ist $S(0,b)$ der Schnittpunkt der Gerade mit der y-Achse.

Sind $P_1(x_1,y_1)$ und $P_2(x_2,y_2)$ zwei Punkte der Gerade, so folgt mit $y_1 = f(x_1) = ax_1+b$ und $y_2 = f(x_2) = ax_2 + b$:

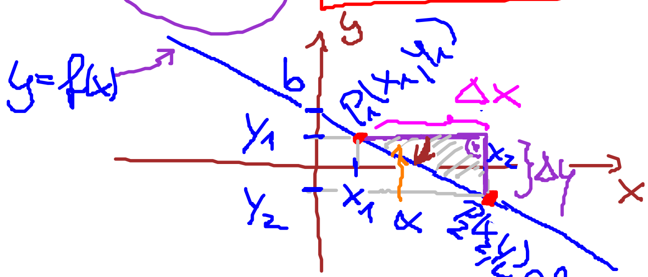
griech. „Delta" für Differenz

$$\boxed{\Delta y = y_2 - y_1 = (ax_2+b)-(ax_1+b) = ax_2+\cancel{b}-ax_1-\cancel{b} = a(x_2-x_1) = a\cdot\Delta x}$$

$:(x_2-x_1)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = a}$$

beschreibt die Steigung der Geraden durch die beiden Punkte P_1, P_2.



$$\boxed{a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha}$$

mit α: Steigungswinkel zur Horizontalen

Neben der Normalform gibt es auch noch die

Koordinaten von P

(i) Punktrichtungsform: $\boxed{y = f(x) = a(x-x_0)+y_0}$

↳ beschreibt die Gerade mit Steigung a, welche durch den Punkt $P(x_0,y_0)$ geht. Denn beachte:

$$y = f(x_0) = a\underbrace{(x_0-x_0)}_{=0}+y_0 = y_0$$

(ii) Zweipunkteform: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$

↳ beschreibt die Gerade, welche durch die Punkte $P_1(x_1,y_1)$ und $P_2(x_2,y_2)$ verläuft.

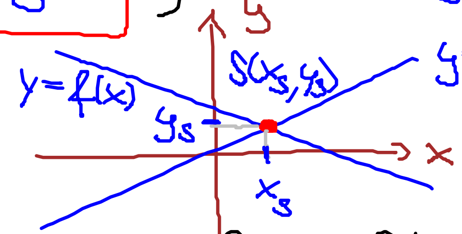
Wir haben als charakteristischen Punkt der Geraden, soweit $a \neq 0$ ist, den Schnittpunkt $N(x_0,0)$ mit x-Achse. Für x_0 gilt:

$$y_0 = f(x_0) = ax_0 + b \overset{!}{=} 0.$$

x_0 heißt auch Nullstelle der affin linearen Funktion $y=f(x)$.

Sind $y=f(x)=ax+b$ und $y=g(x)=cx+d$ die Funktionsgleichungen von zwei Geraden, so kann man den Schnittpunkt $S(x_s,y_s)$ dieser Geraden – sofern er existiert – ermitteln durch Lösen der Gleichung $\boxed{f(x)=g(x)}$, denn in x_s gilt:

$$f(x_s)=y_s=g(x_s)$$



Als Beispiel behandeln wir vom 11. Aufgabenblatt (30) Ü(a), da (30) H(c) die entsprechende Hausaufgabe für kommende Woche ist.

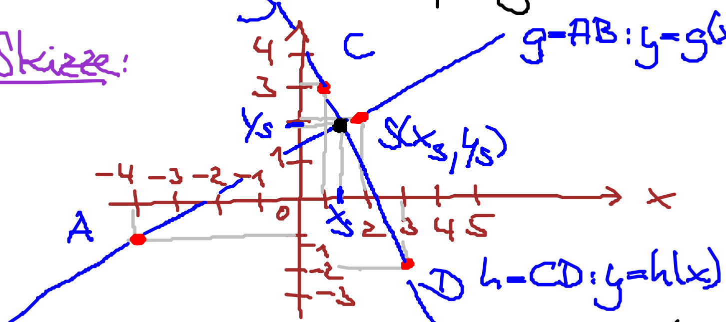
(30) Ü(a): Gegeben sind die 4 Punkte $A(-4,-1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$, $D(3,-2)$

($x_A = -4$, $y_A = -1$, $x_B = 2$, $y_B = 2$, $x_D = 3$, $y_D = -2$)

(i) Gesucht: $y=g(x)$ für Gerade $g=AB$ in Normalform

$y=h(x)$ für Gerade $h=CD$ in Punktrichtungsform bezüglich $C(1,3)$ ($x_c = 1$, $y_c = 3$)

Skizze:



Ausgangspunkt in beiden Fällen: Zweipunkteform

$g=AB$: $\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=a \iff \boxed{\frac{y-(-1)}{x-(-4)}=\frac{2-(-1)}{2-(-4)}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\iff \boxed{\frac{y+1}{x+4}=\frac{1}{2}=a} \overset{\cdot(x+4)}{\iff} y+1=\frac{1}{2}(x+4)=\frac{1}{2}x+2$

$\overset{-1}{\implies} \boxed{y=g(x)=\frac{1}{2}x+1}$

$h=CD$: $\frac{y-y_c}{x-x_c}=\frac{y_D-y_c}{x_D-x_c}=\tilde{a} \iff \frac{y-3}{x-1}=\frac{-2-3}{3-1}=-\frac{5}{2}$

$$\stackrel{\cdot(x-1)}{\Longleftrightarrow} \quad y-3=-\frac{5}{2}\underbrace{(x-1)}_{x-x_c} \quad \stackrel{+3}{\Longrightarrow} \quad \boxed{y=h(x)=-\frac{5}{2}(x-\underset{x_c}{1})+\underset{y_c}{3}}$$

Beachte, dass die Normalform ein Spezialfall der Punktrichtungsform ist: $y=f(x)=ax+b=a\cdot(x-\underset{x_s}{0})+\underset{y_s}{b}$, bezogen auf den Schnittpunkt $S(x_s,y_s)=(0,b)$

(ii) Gesucht: Nullstellen x_1 von $y=g(x)$ und x_2 von $y=h(x)$ sowie Schnittpunkt S von g und h (arithmetisch).

Es gilt:

$$y=g(x)=\frac{1}{2}x+1\stackrel{!}{=}0 \quad \stackrel{-1}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2}x=-1 \quad \stackrel{\cdot 2}{\Longrightarrow} \quad \boxed{x_1=-2}$$

$$y=h(x)=-\frac{5}{2}(x-1)+3\stackrel{!}{=}0 \quad \stackrel{-3}{\Longleftrightarrow} \quad -\frac{5}{2}(x-1)=-3$$

$$\stackrel{:(-5/2)}{\Longleftrightarrow} \quad x-1=\frac{-3}{-5/2}=+3\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{5} \quad \stackrel{+1}{\Longrightarrow} \quad \boxed{x_2=\frac{6}{5}+1=\frac{11}{5}}$$

Wir haben die Punkte $N_1=(-2,0)$ für $g=AB$ und $N_2\left(\frac{11}{5},0\right)$ für $h=CD$ als Schnittpunkte mit der x-Achse.

Zuletzt: $g(x)=h(x) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}x+1\stackrel{!}{=}-\frac{5}{2}(x-1)+3$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}x+1=-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}+3=-\frac{5}{2}x+\frac{11}{2}$$

$$\stackrel{+\frac{5}{2}x-1}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}x=\frac{6}{2}x=3x\stackrel{!}{=}\frac{11}{2}-1=\frac{9}{2}$$

$$\stackrel{:3}{\Longrightarrow} \quad \boxed{x_s=\frac{9/2}{3}=\frac{\cancel{9}^{\,3}}{2\cdot\cancel{3}_{\,1}}=\frac{3}{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y_s=g(x_s)=g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+1=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}}$$

Probe: $h(x_s)=h\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)+3$

$$=-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}+3=-\frac{5}{4}+\underset{\frac{12}{4}}{3}=\frac{7}{4} \checkmark$$

Damit haben wir den Schnittpunkt $\boxed{S(x_s,y_s)=\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)}$ zwischen g und h ermittelt.

So läuft's dann auch zum 24.01./26.01. mit der Hausaufgabe 30 H(c).

ENDE der Vorlesung !!