Vorlesung vom 12.01.2017:

- Die Exponentialfunktion in Anwendungen (2. Teil)
- Affin lineare und quadratische Funktion

1) Zur Exponentialfunktion in Anwendungsaufgaben:

Zur Aufgabe Ü23:

Angesetzt ist die „Wachstumsfunktion" für die Bakterienkultur (siehe Echolk-Mitschrift vergangene Woche):

$$\boxed{N(t) = N_0 \cdot a^t = N_0 \cdot e^{\lambda t}}$$ mit $N_0 = N(0)$, $a > 1$ bzw. $\lambda > 0$

spezifischer Wachstumsparameter.

Dabei gilt: $a = e^{\lambda}$ bzw. $\lambda = \ln a = \log_e a$

23(a): Aus $N(24) = 801$, $N(48) = 2.384$ haben wir ermittelt:

$$\lambda = \frac{\ln(2384/801)}{24} = \frac{\ln 2384 - \ln 801}{24} = 0{,}0454\ldots \approx 0{,}0454$$ // auf 4 Nachkommastellen gerundet

Entsprechend ist dann

$$a = e^{\lambda} = e^{\frac{1}{24}\cdot\ln\left(2384/801\right)} = \left(e^{\ln\left(\frac{2384}{801}\right)}\right)^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{2384}{801}\right)^{1/24} = \sqrt[24]{\frac{2384}{801}}$$

$$= 1{,}04649\ldots \approx 1{,}0465$$ // auf 4 Nachkommastellen gerundet

Einsetzen von a bzw. λ in die Gleichung

(1) $N(24) = N_0 \cdot a^{24} = 801$ ergibt $N_0 = \frac{801}{a^{24}} = \frac{801}{\left(\sqrt[24]{\frac{2384}{801}}\right)^{24}}$

$$\Rightarrow N_0 = \frac{801}{2384/801} = 801 \cdot \frac{801}{2384} = \frac{801^2}{2384} = 269{,}1279\ldots$$

Da aber N_0 ganzzahlig als Anzahl Zellen sein sollte, setzen wir $N_0 = 269$.

Daraus ergibt sich konkret als Wachstumsfunktion:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t = 269 \cdot \left(\sqrt[24]{\frac{2384}{801}}\right)^t \approx 269 \cdot 1{,}0465^t$$

$$= N_0 \cdot e^{\lambda t} \approx 269 \cdot e^{0{,}0454 t}$$

Beachte: Hier wird t in der Einheit „Stunden" $[h]$ gemessen

(23)(b): Gesucht: Zeit t_k mit $N(t_k) = N_k = 10^6 = 1.000.000$ auf die Minute genau.

kritisch!!

Ansatz: $N(t_k) = N_0 \cdot a^{t_k} = N_0 e^{\lambda t_k} \overset{!}{=} N_k = 10^6$

Beide Varianten mit a und λ:

(i) a-Variante: $N_0 \cdot a^{t_k} = 10^6 \xRightarrow{:N_0} a^{t_k} = \frac{10^6}{N_0} = \frac{10^6}{269} \quad // \ln$

$$\Rightarrow \ln(a^{t_k}) \underset{(LG)}{=} t_k \cdot \ln a \overset{!}{=} \ln\left(\frac{10^6}{269}\right) = \ln 10^6 - \ln 269$$
$$= 6 \cdot \ln 10 - \ln 269$$

$$\xRightarrow{:\ln a} \boxed{t_k} = \frac{6 \cdot \ln 10 - \ln 269}{\ln a} \approx \frac{6 \ln 10 - \ln 269}{\ln 1{,}0465}$$
$$= 180{,}8706\ldots\ [h]$$
$$= 180\,h\ (0{,}8706 \cdot 60)\,m = 180\,h\ 52{,}23\ldots\,m$$

Minuten

$$\approx 180\,h\ 52\,m$$

$60\,m \mathrel{\hat{=}} 1\,h$

(ii) λ-Variante: $N_0 \cdot e^{\lambda t_k} = N_k = 10^6 \xRightarrow{:N_0} e^{\lambda t_k} = \frac{N_k}{N_0} = \frac{10^6}{269} \quad // \ln$

$$\Rightarrow \ln(e^{\lambda t_k}) = \lambda t_k = \ln\left(\frac{10^6}{269}\right) = 6 \cdot \ln 10 - \ln 269$$

$$\xRightarrow{:\lambda} t_k = \frac{6 \cdot \ln 10 - \ln 269}{\lambda} \approx \frac{6 \ln 10 - \ln 269}{0{,}0454}$$
$$= 181{,}07487\ldots\ [h]$$

Also: $\boxed{t_K = 181\,h\;(\underbrace{0{,}0748\ldots\cdot 60}_{=4{,}492\ldots})\,m \approx 181\,h\;4\,m}$

Beachte, dass die Differenz beider Werte in (i), (ii) auf unterschiedlichen Rundungen beruht.

Jetzt noch einmal Aufgabe „(27)":

Die Barometrische Höhenformel hat die Funktionsvorschrift

(*) $\boxed{p(x) = p_0 \cdot e^{-\frac{a\cdot x}{p_0}}}$ mit $p_0 = p(0)$ in [hPa] gemessen, $a > 0$ spezifische Gaskonstante

(27)(a): Gegeben: $a = 0{,}1201$ [hPa/m] „Höhenmeter"

$$p(100) = 1001{,}3 \text{ [hPa]}$$
$$p(1000) = 899{,}1 \text{ [hPa]}$$

Gesucht: $p_0 = p(0)$

Zunächst gilt:

Nichtlineares Gleichungssystem

$$\boxed{\begin{aligned} (1)\; p(100) &\overset{(*)}{=} p_0 \cdot e^{-\frac{a\cdot 100}{p_0}} = p_0 \cdot e^{-\frac{12{,}01}{p_0}} = 1001{,}3 \\ (2)\; p(1000) &= p_0 \cdot e^{-\frac{a\cdot 1000}{p_0}} = p_0 \cdot e^{-\frac{120{,}1}{p_0}} = 899{,}1 \end{aligned}}$$

$$\frac{(1)}{(2)}: \quad \frac{p(100)}{p(1000)} = \frac{\cancel{p_0} \cdot e^{-\frac{12{,}01}{p_0}}}{\cancel{p_0} \cdot e^{-\frac{120{,}1}{p_0}}} \overset{!}{=} \frac{1001{,}3}{899{,}1}$$

$$\overset{(PG)}{\Longleftrightarrow} \quad e^{-\frac{12{,}01}{p_0} - \left(-\frac{120{,}1}{p_0}\right)} = e^{+\frac{120{,}1}{p_0} - \frac{12{,}01}{p_0}} = \boxed{e^{\frac{120{,}1 - 12{,}01}{p_0}} = \frac{1001{,}3}{899{,}1}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{\frac{108{,}09}{p_0}} = \frac{1001{,}3}{899{,}1} \quad // \ln$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{108{,}09}{p_0} = \ln\left(e^{\frac{108{,}09}{p_0}}\right) = \ln\left(\frac{1001{,}3}{899{,}1}\right) = \ln(1001{,}3) - \ln(899{,}1)}$$

$$\Longrightarrow 108{,}09 = p_0 \cdot \ln\left(\frac{1001{,}3}{899{,}1}\right) \qquad \cdot p_0$$

$$\Longrightarrow \boxed{p_0 =} \frac{108{,}09}{\ln\left(\frac{1001{,}3}{899{,}1}\right)} = \frac{108{,}09}{\ln(1001{,}3) - \ln(899{,}1)} \qquad : \ln(\ldots)$$

$$= 1.003{,}992\ldots \approx 1.004{,}0\ [hPa]$$

27 (b): Gegeben aus Teil (a): $p_0 = 1.004\ [hPa]$, $a = 0{,}1201\ [hPa/m]$

Gesucht: $x_0 > 0$ mit $p(x_0) = 266{,}4\ [hPa]$

Ansatz aus Höhenformel (*): $\boxed{p(x) = 1004 \cdot e^{-\frac{0{,}1201}{1004} x}}$ p_0

Dann soll gelten:

$$\boxed{p(x_0) = 1.004 \cdot e^{-\frac{0{,}1201}{1{,}004} x_0} = 266{,}4}\ !$$

$$\Longleftrightarrow e^{-\frac{0{,}1201}{1004} x_0} = \frac{266{,}4}{1004} \qquad :1004 \qquad // \ln$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{0{,}1201}{1004} \cdot x_0 = \ln\left(e^{\cdots}\right) = \ln\left(\frac{266{,}4}{1004}\right) = \ln 266{,}4 - \ln 1004$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x_0} = \frac{\ln 266{,}4 - \ln 1004}{-\frac{0{,}1201}{1004}} = -\frac{1004}{0{,}1201} \cdot \left(\ln 266{,}4 - \ln 1004\right) \qquad : \left(-\frac{0{,}1201}{1004}\right)$$

$$= \frac{1004 \cdot (\ln 1004 - \ln 266{,}4)}{0{,}1201} = 11.091{,}21861\ [m]$$

$$\approx 11.091{,}22\ [m] \ \hat{=}\ 11\ km\ 91\ m\ 22\ cm$$

Bemerkung zur Hausaufgabe H26:

Man setze als Funktionsvorschrift an:

$$\boxed{T(t) = T_0 \cdot a^t = T_0 \cdot e^{-\lambda t}} \quad \text{mit } \lambda > 0,\ a = e^{-\lambda} < 1,\ T_0 = T(0)$$

Beachte: t in minuten gemessen!

Zur Hausaufgabe H29:

$$\boxed{k(T) = A \cdot e^{-\frac{\lambda}{T}}}$$ mit speziellen Konstanten $A>0$, $\lambda>0$

absolute Temperatur in Kelvin

Im Teilen (a), (b): $\lambda = 2{,}95 \cdot 10^{4}$ [K], $A = 4{,}3 \cdot 10^{13}$ [1/sec]

Erinnert an Ü27!!

Im Teil (c) werden jetzt $A>0$, $\lambda>0$ neu ermittelt aus den angegeben Werten

$k(300) = 2{,}8 \cdot 10^{-5}$ [1/s], $k(400) = 7{,}0 \cdot 10^{-1}$ [1/s].

Dann viel Erfolg mit den Hausaufgaben.

ENDE der Vorlesung!!