Vorlesung vom 05.01.2017:

- Exponential- und Logarithmusfunktion (siehe Skript S. 9)
- Anwendungsaufgaben

1) Funktion allgemein und Exponential-, Logarithmusfunktion im Speziellen

Definition: Unter einer reellen Funktion $f: A \to B$ einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ in eine Menge $B \subset \mathbb{R}$ versteht man eine Abbildungsvorschrift der Form $\boxed{y = f(x)}$, durch welche jedem $x \in A$ ein eindeutiges $y \in B$ zugeordnet wird. x heißt auch das Argument und $y = f(x)$ das Bild von x unter f.

„Teilmenge von"

Beispiele:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2$ // Quadratische Fkt = spezielles Polynom

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\boxed{y = f(t) = e^{\lambda t}}$ // Exponentialfunktion für spezielles $\lambda \in \mathbb{R}$ fest

statt „x"; oft für time (=Zeit)

$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ // Wurzelfunktion

$\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

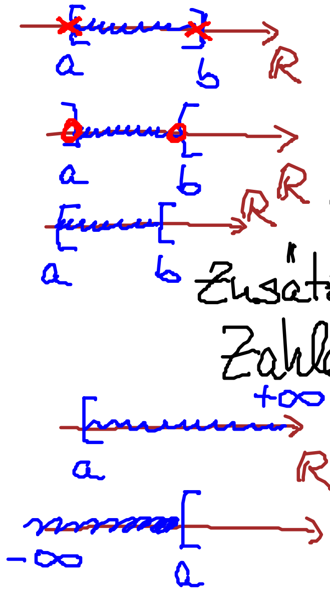
$\ln:]0, +\infty[= \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $y = \ln x$ // natürlicher Logarithmus

$0 \notin]0, +\infty[$

$\log_a:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $y = \log_a x$ // Logarithmusfkt. zur Basis $a > 0$

Wir benutzen oft die Intervallschreibweise:

Für 2 Zahlen $a<b$:



„mit der Eigenschaft:"

(i) $[a,b] := \{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$, d.h.: $a,b\in[a,b]$

(ii) $]a,b[:= \{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$, d.h.: $a,b\notin\,]a,b[$

(iii) $[a,b[= \{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$, d.h.: $a\in[a,b[$, $b\notin[a,b[$

Zusätzlich Symbole $\pm\infty$ für den „unerreichbaren" Zahlenhorizont. Daher:

$[a,+\infty[= \{x\in\mathbb{R} \mid x\ge a\} = \{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\}$

$]-\infty,a[= \{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$

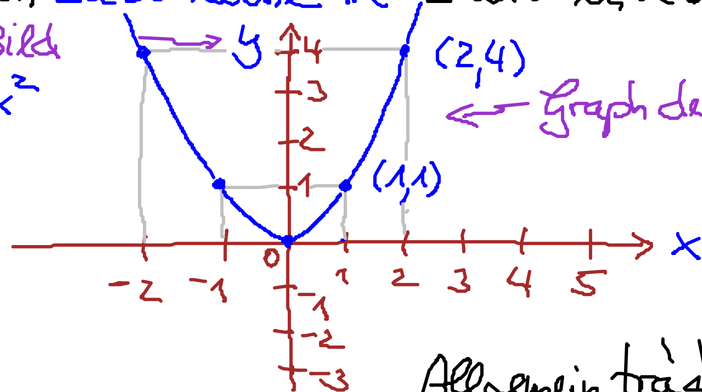
Eine Funktion ist eine Art „blackbox", in der jedem $x\in A$ ein eindeutiges $y\in\mathbb{R}$ zugeordnet wird:

$$x \longrightarrow \underset{y=f(x)}{\overset{f}{\boxed{\text{Abb.-vorschrift}}}} \longrightarrow y$$

Beachte, dass man reellen Funktionen i.A. ein „Schaubild" in der reellen Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ zuordnen kann, „Graph" genannt:

Wert/Bild $\longrightarrow y$

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=f(x)=x^2$



$\longleftarrow$ Graph der Quadratfunktion

$\longleftarrow$ Variable x: Funktionsargument

z.B.:

$f(\underset{x}{1}) = 1^2 = \underset{y}{1}$

$f(0)=0^2=0$

$f(-1)=(-1)^2=+1$

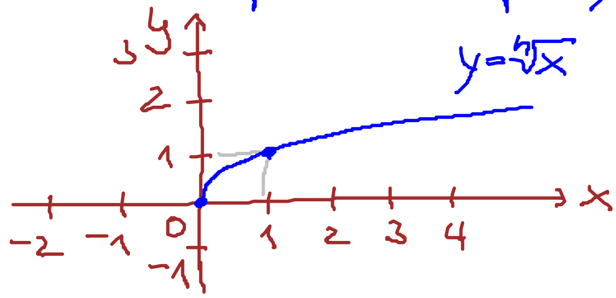
$f(2)=2^2=4$

$f(-2)=(-2)^2=4$

Allgemein trägt man im Graphen die Punkte $(x,y)=(x,\underbrace{f(x)}_{y})$ ein.

Also ist der Graph der Quadratfunktion „die Normalparabel".

Graph der Wurzelfunktion $f:[0,\infty[\,\to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[2]{x}=y$

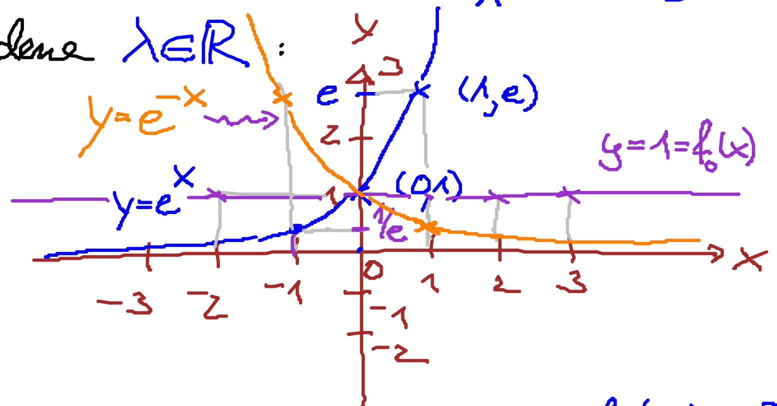


$f(0)=\sqrt[2]{0}=0$

$f(1)=\sqrt[2]{1}=1$

Graph der Exponentialfunktion $f_\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f_\lambda(x)=e^{\lambda x}$

für verschiedene $\lambda\in\mathbb{R}$:



$f_\lambda(0)=e^{\lambda\cdot 0}=e^{0}=1$

Für $\lambda=1$: $f_1(x)=e^x$,

$f_1(1)=e^1=e$
$=2{,}7172\ldots$

$f_1(-1)=e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 1/3$

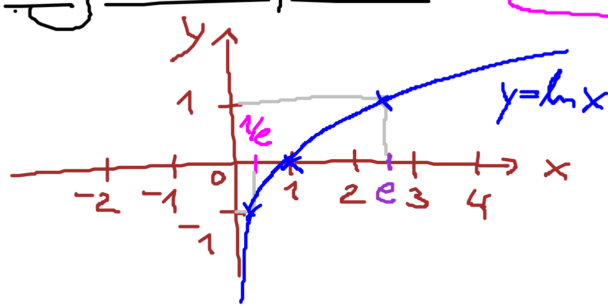
Für $\lambda=0$: $y=f_0(x)=e^{0x}=e^{0}=1$, konstante Einsfunktion

Für $\lambda=-1$: $y=f_{-1}(x)=e^{(-1)\cdot x}=e^{-x}=\frac{1}{e^x}$, also z.B.: $f_{-1}(0)=e^{-0}=\frac{1}{1}=1$

$f_{-1}(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$,

$f_{-1}(-1)=e^{-(-1)}=e^{+1}=e^{1}=e$

Schaubild zur Logarithmusfunktion:



$f(x)=\ln x=y$;

$f(1)=\ln 1=0\ (=y)$

$f(e)=\ln e=1\ (=y)$

$f(e^{-1})=f(1/e)=\ln(e^{-1})$

$= -1 \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} = -1$

2) Anwendungsaufgaben:

Dazu Aufgabe Ü23 auf Blatt 10.

Zugrunde liegt die Beschreibung des Wachstumsverhalten einer Zellkultur in Abhängigkeit von der Zeit als reelle Funktion: (*)

Variable beschreibt Zellenanzahl! = Funktionswert

$N: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \boxed{y = N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t} = N_0 \cdot a^t}$ Abbildungsvorschrift

Zeitvariable = Argument

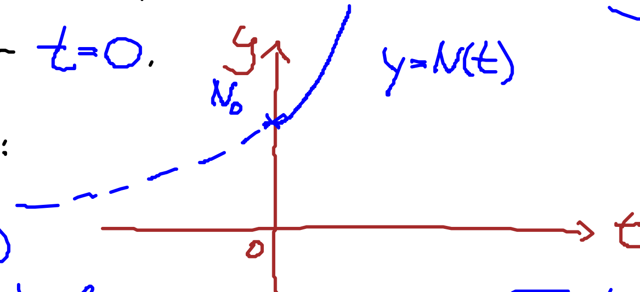
Beachte, dass λ und a wie folgt zusammenhängen:

$$(e^{\lambda})^t = e^{\lambda t} = a^t \Rightarrow \boxed{e^{\lambda} = a} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\lambda = \log_e a = \ln a}$$

Weiterhin gilt in (*): $\boxed{y = \underline{N(0)} = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot 0} = N_0 \cdot \underbrace{e^0}_{=1} = \underline{N_0}}$

D.h.: N_0 in der Abbildungsvorschrift (*) beschreibt die Ausgangszellenanzahl zum Zeitpunkt $t = 0$.

Schaubild/Graph von $N(t)$:



a) Ziel: Bestimme $N_0 = N(0)$

sowie $a > 0$ bzw. $\lambda = \ln a$ aus 2 gegebenen Funktionswerten.

Es ist vorgegeben: $N(24) = 801$, $N(48) = 2.384$.

$t_1 = 24\,[h]$: Argument $\quad t_2 = 48\,[h]$

Eingesetzt in (*) erhält man:

$$(1) \quad N(\underline{24}) = N_0 \cdot a^{\underline{24}} = N_0 \cdot e^{\lambda 24} = N_0 \cdot e^{24\lambda} \overset{!}{=} 801$$

$$(2) \quad N(\underline{48}) = N_0 \cdot a^{\underline{48}} = N_0 \cdot e^{\lambda 48} = N_0 \cdot e^{48\lambda} \overset{!}{=} 2.384$$

Argument(e) $\qquad$ Funktionswerte

Übereinander:

$$(1) \quad N_0 \cdot e^{24\lambda} = \boxed{801} = N(24)$$

$$(2) \quad N_0 \cdot e^{48\lambda} = \boxed{2384} = N(48)$$

Division: $\frac{(2)}{(1)}$: $\frac{N(48)}{N(24)} = \frac{\cancel{N_0} \cdot e^{48\lambda}}{\cancel{N_0} \cdot e^{24\lambda}} = e^{48\lambda - 24\lambda} = e^{24\lambda} \overset{!}{=} \boxed{\frac{2.384}{801}}$

Wir suchen λ. Also:

$$e^{24\lambda} = \frac{2384}{801} \overset{\ln}{\Longleftrightarrow} \ln(e^{24\lambda}) \overset{!}{=} \ln\left(\frac{2.384}{801}\right)$$

$$\Longleftrightarrow 24\lambda \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} = 24\lambda \overset{!}{=} \ln 2384 - \ln 801$$

$$\overset{:24}{\Longrightarrow} \boxed{\lambda = \frac{\ln 2384 - \ln 801}{24} = 0{,}0454\ldots \approx 0{,}0454} \; (**)$$

(auf 4 Nachkommastellen gerundet)

Um N_0 zu berechnen, setze das gefundene λ in die Gleichung (1) bzw. (2) ein.

$$(1)\quad N_0 \cdot e^{24\lambda} = 801 \Longrightarrow N_0 = \frac{801}{e^{24\lambda}} \overset{(**)}{=} \frac{801}{e^{\ln 2384 - \ln 801}}$$

$$\Longrightarrow N_0 = \frac{801}{e^{\ln\left(\frac{2384}{801}\right)}} = \frac{801}{\left(\frac{2384}{801}\right)} = 801 \cdot \frac{801}{2384} = \frac{801^2}{2384} = 269{,}1279\ldots$$

$$a^{\log_a c} = c$$

Antwort: Die Ausgangsanzahl beträgt

$$N_0 = 269$$

Denn: $0{,}127\ldots$ Zellen gibt es nicht.

Die restliche Aufgabenlösung erfolgt in der nächsten Woche in der Vorlesung.

ENDE der Vorlesung!!