Vorlesung vom 15.12.2016:

- Nachschlag zur Aufgabe 21 vom 8. Aufgabenblatt
- Lösen von Potenzgleichungen
- Anwendungen der Logarithmus- und Exponentialfunktion in fachspezifischen Aufgaben ← vertieft in der 1. Januarwoche!!

1) Zu den Logarithmen verschiedener Basen:

(21) Ziel: In (i) Umwandlung eines „komplexen" Terms der Form $\log_b(\ldots)$ in eine Summe/Differenz von „einfachen" Quotiententermen der Gestalt $\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$

In (ii) umgekehrt die Umkehrung von Summentermen verschiedener Basen in einen Term der Form $\frac{\ln a}{\ln b} = \log_b a$ ← komplexer Ausdruck!!

Ü(a): $$\boxed{\log_5\left(\sqrt[3]{\frac{16a^5b^2}{cd^3}}\right) = \ldots = \frac{1}{3}\frac{\ln 16}{\ln 5} + \frac{5}{3}\frac{\ln a}{\ln 5} + \frac{2}{3}\frac{\ln b}{\ln 5} - \frac{1}{3}\frac{\ln c}{\ln 5} - \frac{\ln d}{\ln 5}}$$

Anwendung von Logarithmengesetzen

Beachte: $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$

$$\boxed{\sqrt[3]{x^2} = (x^2)^{1/3} = x^{2/3}}$$

Ü(b): $$\log_{1/2}\left(\frac{3e^4\sqrt[3]{x^2}}{9\sqrt{z}}\right) = \frac{\ln\left(\frac{3e^4\sqrt[3]{x^2}}{9\sqrt{z}}\right)}{\ln(1/2)}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{3e^4x^{2/3}}{9\cdot z^{1/2}}\right)}{\ln(1/2)} = \frac{\ln(3e^4x^{2/3}) - \ln(9z^{1/2})}{\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2}$$

$$= -\frac{\ln(3e^4\cdot x^{2/3})}{\ln 2} + \frac{\ln(9z^{1/2})}{\ln 2}$$

$$= -\frac{\ln 3 + \ln(e^4) + \ln(x^{2/3})}{\ln 2} + \frac{\ln 9 + \ln(z^{1/2})}{\ln 2}$$

$$= -\frac{\ln 3 + 4\ln e + \frac{2}{3}\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln 9 + \frac{1}{2}\ln z}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_{1/2}\left(\frac{3e^4\sqrt[3]{x^2}}{9\sqrt{z}}\right) = -\frac{\ln 3}{\ln 2} - 4\cdot\frac{\overbrace{\ln e}^{=1}}{\ln 2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln 9}{\ln 2} + \frac{1}{2}\frac{\ln z}{\ln 2}}$$

NR: $x = \log_b 1$

$\Leftrightarrow b^x = 1 = b^0$

$\Rightarrow \boxed{\log_b 1 = x = 0}$

NR: $x = \log_b b$

$\Leftrightarrow b^x = b = b^1$

$\Rightarrow x = \boxed{\log_b b = 1}$

Jetzt umgekehrt (ii):

Ziel: Term $= \boxed{\frac{\ln a}{\ln b}} = \log_b a$

(21) ü(d): $\boxed{2-\log_2(u^2)+3\log_4(\sqrt{u^3})} = 2-\frac{\ln(u^2)}{\ln 2}+3\cdot\frac{\ln(\sqrt{u^3})}{\ln 4}$

$4=2^2$

$= 2-\frac{2\cdot\ln u}{\ln 2}+3\cdot\frac{\ln(u^{3/2})}{\ln(2^2)} = 2-\frac{2\ln u}{\ln 2}+3\cdot\frac{\frac{3}{2}\ln u}{2\ln 2}$

$= 2-2\cdot\frac{\ln u}{\ln 2}+\underbrace{3\cdot\frac{3}{2}}_{=\frac{9}{4}}\cdot\frac{1\cdot\ln u}{2\cdot\ln 2} = 2+\big(\underbrace{-2+\tfrac{9}{4}}_{=1/4}\big)\cdot\frac{\ln u}{\ln 2}$

$= 2+\frac{1}{4}\cdot\frac{\ln u}{\ln 2}$ $\quad\cdot\frac{4\cdot\ln 2}{4\cdot\ln 2}$ $\quad = \frac{8\cdot\ln 2+\ln u}{4\cdot\ln 2} = \frac{\ln(2^8)+\ln u}{\ln(2^4)}$ $\quad 256$

$= \boxed{\frac{\ln(256u)}{\ln 16}} = \boxed{\log_{16}(256u)}$

ü(e): $\boxed{\log_{1/2}(\sqrt[3]{ab^2})-\log_8(a^3)+1} = \frac{\ln(\sqrt[3]{ab^2})}{\underbrace{\ln 1}_{=0}-\ln 2}-\frac{\ln(a^3)}{\ln 8}+1$ $\quad 8=2^3$

$= -\frac{\ln(a^{1/3}\cdot b^{2/3})}{\ln 2}-\frac{\ln(a^3)}{\ln(2^3)}+1$

$= -\frac{\frac{1}{3}\ln a+\frac{2}{3}\ln b}{\ln 2}-\frac{\cancel{3}\ln a}{\cancel{3}\ln 2}+1 = \frac{-(\frac{1}{3}\ln a+\frac{2}{3}\ln b)-\ln a+\ln 2}{\ln 2}$ $\quad 1 = \frac{\ln 2}{\ln 2}$

$= \frac{-\frac{1}{3}\ln a-\ln a-\frac{2}{3}\ln b+\ln 2}{\ln 2} = \frac{-4/3\ln a-2/3\ln b+\ln 2}{\ln 2}$

$\cdot\frac{3}{3}$

$= \frac{-4\ln a-2\ln b+3\cdot\ln 2}{3\cdot\ln 2} = \frac{-\ln(a^4)-\ln(b^2)+\ln(2^3)}{\ln(2^3)}$ $\quad 8$

$= \frac{\ln\left(\frac{8}{a^4b^2}\right)}{\ln 8} = \boxed{\log_8\left(\frac{8}{a^4b^2}\right)}$

Auch möglich: $-4\ln a = \ln(a^{-4}) = \ln\left(\frac{1}{a^4}\right)$

2) Potenzgleichungen:

22 ü(a): $4^{x+3} - 6\cdot 3^{x-1} = 4\cdot 3^{x-2} + 4^{x+1}$ // Welches x löst diese Potenzgleichung?

$$\Leftrightarrow \quad 4^x \cdot 4^3 - 6\cdot\frac{3^x}{3^1} = 4\cdot\frac{3^x}{3^2} + 4^x\cdot 4^1$$

$$\Leftrightarrow \quad 64\cdot 4^x - \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3}_{\,1}}\cdot 3^x = \frac{4}{9}\cdot 3^x + 4\cdot 4^x$$ // Sortiere nach Potenzbasis

$$\Leftrightarrow \quad 64\cdot 4^x - 4\cdot 4^x = +2\cdot 3^x + \frac{4}{9}\cdot 3^x$$

$+2\cdot 3^x - 4\cdot 4^x$

$$\Leftrightarrow \quad 60\cdot 4^x = \frac{22}{9}\cdot 3^x$$ // ln

$$\Leftrightarrow \quad \ln(60\cdot 4^x) = \ln\left(\frac{22}{9}\cdot 3^x\right)$$ | Logarithmengesetze!!

$$\Leftrightarrow \quad \ln 60 + x\cdot\ln 4 = \ln 22 - \ln 9 + x\ln 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x\cdot\ln 4 - x\cdot\ln 3 = x(\ln 4 - \ln 3) = \ln 22 - \ln 9 - \ln 60$$

$-x\cdot\ln 3 - \ln 60$

$$\xRightarrow{:(\ln 4 - \ln 3)} \quad \boxed{x = \frac{\ln 22 - \ln 9 - \ln 60}{\ln 4 - \ln 3}} = \frac{\ln\left(\frac{22}{9\cdot 60}\right)}{\ln(4/3)} = \frac{\ln(22/540)}{\ln(4/3)}$$

ENDE der Vorlesung!!

Allen Teilnehmern frohe Festtage und einen guten Start in das neue Jahr 2017!!