Vorlesung vom 08.12.2016:

- Logarithmengesetze
- Lösen von Potenzgleichungen

1) Zum Logarithmus (s. Kurzskript):

Wir haben $x = \log_b a$ als die eindeutige Lösung für $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ der Potenzgleichung $\boxed{b^x = a}$ definiert.

Basis: b; Exponent: x; Numerus (= Potenzwert): a

Aufgrund der verallgemeinerten Potenzgesetze

$$\boxed{\begin{array}{ll} (P1) & b^\alpha \cdot b^\beta = b^{\alpha+\beta} \\ (P2) & \frac{b^\alpha}{b^\beta} = b^{\alpha-\beta} \\ (P3) & (b^\alpha)^\beta = b^{\alpha \cdot \beta} \end{array}}$$

erhalten wir für jede festgewählte Basis $b > 0$, $b \neq 1$ folgende Logarithmengesetze:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (L1) & \log_b a + \log_b c = \log_b (a \cdot c) \\ (L2) & \log_b a - \log_b c = \log_b \left(\frac{a}{c}\right) \\ (L3) & \alpha \cdot \log_b a = \log_b (a^\alpha) \end{array}}$$

Wie kommt man darauf? ⟶

Antwort: Wir greifen auf die Definition des Logarithmus zurück:

(L1): Sei $u = \log_b a$, $v = \log_b c$. Dann: $a = b^u$, $c = b^v$

Es folgt: $a\cdot c = b^u\cdot b^v \stackrel{(P1)}{=} b^{u+v} \iff d = b^w$ mit $d = ac,\ w = u+v$

$\stackrel{\text{Def.}}{\Longrightarrow} \boxed{\log_b(ac) = u+v} \iff \log_b d = w$

$= \log_b a + \log_b c$ ■

(L2): Sei $u = \log_b a$, $v = \log_b c$; also: $a = b^u$, $c = b^v$

Es folgt: $\frac{a}{c} = \frac{b^u}{b^v} \stackrel{(P2)}{=} b^{u-v} \Rightarrow u - v = \log_b\left(\frac{a}{c}\right)$

Also: $\boxed{\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = u - v = \log_b a - \log_b c}$ ■

(L3): Sei $u = \log_b a \iff a = b^u$. Dann gilt:

$a^\alpha = (b^u)^\alpha \stackrel{(P3)}{=} b^{\alpha\cdot u} \iff c = b^w$ mit $c = a^\alpha$, $w = \alpha\cdot u$

$\Longrightarrow \underbrace{\alpha\cdot u}_{=w} = \log_b(\underbrace{a^\alpha}_{=c})$. Also: $\boxed{\log_b(a^\alpha) = \alpha\cdot u = \alpha\cdot\log_b a}$ ■

Aufgrund der Logarithmengesetze waren historisch betrachtet Logarithmen ganz wichtig. Stichwort: Logarithmentafeln zu Logarithmen zur Basis $b = 10$

Hilfsmittel als Vorgänger des Computers: Rechenschieber.

Idee:

Berechne $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$. Transferiere das Problem in den Logarithmischen Bereich.

Logarithm. Bereich:

$a = 3{,}78 \xrightarrow[\text{tafel}]{\text{Logarithmen-}} u = \lg a = \log_{10} a$

$= \lg 3{,}78$

$= \lg[0{,}378 \cdot 10]$

$= \lg(0{,}378) + \underbrace{\lg 10}_{=1}$

$= 1 + \lg(0{,}378)$

$\Downarrow$

$\lg x = \lg \sqrt[3]{a} = \lg a^{1/3}$

$= \frac{1}{3} \cdot \lg a = \frac{1}{3} \cdot u$

$= \frac{1}{3}(1 + \lg(0{,}378)) = c$

$\Downarrow$

$x = \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{3{,}78}$

$= 10^{c}$

Logarithmentafel

Konkret:

$a = 3{,}78 \xrightarrow{\text{Log.-tafel}} u = \lg a = 0{,}5774\ldots$

$\Downarrow$

$c = \frac{u}{3} = 0{,}19249\ldots$

$x = \sqrt[3]{a} = 10^{c} \xleftarrow{\text{Log-tafel}}$

$= 1{,}55772\ldots$

„Problemlösung" über den „Umweg" der logarithmischen „Welt"!!

Zur Anwendung der Logarithmengesetze

2 Beispiele:

(18) $\overset{\shortparallel}{u}(a)$: Fasse folgenden Term zu einem einzigen Logarithmusterm zusammen:

$$\frac{1}{3} \cdot \log_c(a^2 - b^2) - \frac{1}{2}\log_c(a-b) - \frac{1}{2}\log_c(a+b)$$

$$\overset{(L3)}{=} \left\{\log_c\left[(a^2-b^2)^{1/3}\right] - \log_c\left[(a-b)^{1/2}\right]\right\} - \log_c\left[(a+b)^{1/2}\right]$$

$$\overset{(L2)}{=} \log_c\left\{\frac{(a^2-b^2)^{1/3}}{(a-b)^{1/2}}\right\} - \log_c\left[(a+b)^{1/2}\right]$$

$$\overset{(L2)}{=} \log_c\left\{\frac{(a^2-b^2)^{1/3}}{(a-b)^{1/2}} : (a+b)^{1/2}\right\} = \log_c\left\{\frac{(a^2-b^2)^{1/3}}{\underbrace{(a-b)^{1/2} \cdot (a+b)^{1/2}}_{= [(a-b)(a+b)]^{1/2}}} \cdot 1\right\}$$

$$= \log_c\left\{\frac{(a^2-b^2)^{1/3}}{(a^2-b^2)^{1/2}}\right\} = \log_c\left(\frac{u^{1/3}}{u^{1/2}}\right)$$

$\boxed{u = a^2 - b^2}$ blackbox

$$= \log_c\left(u^{1/3 - 1/2}\right) = \log_c\left(u^{\frac{2-3}{6}}\right) = \log_c\left(u^{-1/6}\right)$$

$$= \log_c\left(\frac{1}{u^{1/6}}\right) = \log_c\left(\frac{1}{\sqrt[6]{u}}\right) = \log_c\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^2-b^2}}\right)$$

Also: $$\boxed{\frac{1}{3}\log_c(a^2-b^2) - \frac{1}{2}\log_c(a-b) - \frac{1}{2}\log_c(a+b) = \log_c\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^2-b^2}}\right)}$$

Nun das ganze „rückwärts":

(19) Ü(e): Zerlege folgenden Logarithmusterm in einfache Bestandteile

$$\ln\left\{\frac{\sqrt{a}\cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c}\cdot e^{-3}}\right\} \overset{(L2)}{=} \ln(\sqrt{a}\cdot b^{-2}) - \ln(\sqrt[3]{c}\cdot e^{-3})$$

$$\overset{(L1)}{=} \{\ln(\sqrt{a}) + \ln(b^{-2})\} - \{\ln(\sqrt[3]{c}) + \ln(e^{-3})\}$$

$$= \{\ln(a^{1/2}) + \ln(b^{-2})\} - \{\ln(c^{1/3}) + \ln(e^{-3})\}$$

$$\overset{(L3)}{=} \{\tfrac{1}{2}\cdot\ln a + (-2)\ln b\} - \{\tfrac{1}{3}\ln c + (-3)\ln e\}$$

$$= \frac{1}{2}\ln a - 2\ln b - \frac{1}{3}\ln c + 3\cdot\ln e$$

Was ist aber $x = \ln e$? Na, beachte:

$$x = \ln e = \log_e e \iff e^x = e = e^1 \implies x = 1$$

Daher gilt: $\ln e = 1$. Allgemeiner:

(i) $x = \log_b b \iff b^x = b = b^1 \implies \boxed{\log_b b = x = 1}$

(ii) $x = \log_b 1 \iff b^x = 1 = b^0 \implies \boxed{\log_b 1 = x = 0}$

Wichtige Umrechnungsformel für Logarithmen mit verschieden Basen:

Zunächst gilt: (*) $\boxed{b^{\log_b a} = a}$, denn:

$$u = \log_b a \iff a = b^u = b^{\log_b a}$$

Nun: $\log_c a = \lambda \cdot \log_b a$ // Was muss dieses λ sein??

$\boxed{x = \log_c a} \iff c^x = a \implies a = (\underbrace{b^{\log_b c}}_{c})^x$

$\implies a = b^{x \cdot \log_b c} = b^u$ $c = b^{\log_b c}$

$\implies x \cdot \log_b c = u = \log_b a \implies \boxed{x = \dfrac{\log_b a}{\log_b c}}$

Fazit: $\boxed{\log_c a = \dfrac{\log_b a}{\log_b c}}$ Konkret mit Bsp ln, lg:

$$\boxed{\log_c a = \frac{\ln a}{\ln c} = \frac{\lg a}{\lg c}}$$

Hausaufgaben zum Neuen Jahr (3.1.17 / 5.1.17):

20 H(c), H(f), H(j) sowie 21 H(c) + H(f).

ENDE der Vorlesung!!