Vorlesung vom 01.12.2016:

- Nachtrag zu Wurzeln → Potenzschreibweise
- Logarithmieren als 2. Umkehroperation zum Potenzieren

1) Zu den n-ten Wurzeln:

Wir haben das Radizieren als Umkehroperation des Potenzierens kennengelernt. Also: Für $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ ist

$$\boxed{x = \sqrt[n]{a} \iff x^n = a}$$ Potenzgleichung!

Anders: Im Fall des Radizierens ist eine Potenz sowie der Exponent bekannt. Gesucht ist die Basis der Potenz!

Wir haben auch festgestellt, dass auf der Suche nach einer alternativen Darstellung für $\sqrt[n]{\ }$ mittels Potenzschreibweise die einzige „plausible" Lösung die folgende ist: $x = \sqrt[n]{a} = a^{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = 1/n}$

D.h.: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ bzw. $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m} = (a^{1/n})^m = a^{\frac{m}{n}}}$

Z.B.:

$$x = 3^{2/3} = (3^2)^{1/3} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9} = (\sqrt[3]{3})^2$$

Zähler = Potenz
Nenner = Wurzel

Damit haben wir Potenzen $x = a^r$ für $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ erklärt.

2. Beispiel:

$$\boxed{x = 5^{-3/2}} = \frac{1}{5^{3/2}} = \frac{1}{(5^3)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{5^3}} = \frac{1}{\sqrt{125}} = \frac{1}{5\sqrt{5}}$$

$r = -\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$

Damit lassen sich jetzt mögliche Wurzelgesetze als verallgemeinerte Potenzgesetze interpretieren:

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad (r,s \in \mathbb{Q})$ (3) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r \quad (r,s \in \mathbb{Q})$

(2) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad (r,s \in \mathbb{Q})$ (4) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r \quad (r,s \in \mathbb{Q})$

(5) $(a^r)^s = a^{r \cdot s} \quad (r,s \in \mathbb{Q})$

Dazu Aufgabe

16 Ü(a):

$$\boxed{\sqrt[4]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}}} = \sqrt[4]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \left\{ a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \right\}^{1/4}$$

$$= \left\{ a^2 \cdot \underbrace{(a^2)^{1/3}}_{(u^r)^s = u^{r \cdot s}} \right\}^{1/4} = \left\{ a^2 \cdot a^{2 \cdot \frac{1}{3}} \right\}^{1/4}$$

$$= \left\{ \underbrace{a^2 \cdot a^{2/3}}_{u^r \cdot u^s = u^{r+s}} \right\}^{1/4} = \left\{ a^{2+\frac{2}{3}} \right\}^{1/4} = \left\{ a^{8/3} \right\}^{1/4}$$

$$\underset{(u^r)^s = u^{r \cdot s}}{=} a^{\frac{\cancel{8}^{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_{1}}} = a^{2/3}$$

$$= \sqrt[3]{a^2}$$

Fazit:

$$\boxed{\sqrt[4]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}} = a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}}$$

Ü(c):

$$\boxed{\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}} = a^{\frac{4n^2-1}{2n-1}} = a^{\frac{\cancel{(2n-1)}^{1}(2n+1)}{\cancel{2n-1}_{1}}} = a^{2n+1}$$

Potenz

Wurzel

u(e):

$2^{\sqrt{3}^4} = ??$

Es geht darum, wie kaskadierte Potenzen gerechnet bzw. verstanden werden.

Allgemein: $a^{r^s} \overset{?}{\neq} (a^r)^s = a^{r\cdot s}$. Genauer: $a^{r^s} = a^{(r^s)}$ „Abarbeitungsrichtung"

Also konkret:

$$\boxed{2^{\sqrt{3}^4} = 2^{(\sqrt{3}^4)} = 2^{(3^{\frac{4}{2}})} = 2^{(3^2)} = 2^9 = 512}$$

Demgegenüber: $(2^{\sqrt{3}})^4 = 2^{4\cdot\sqrt{3}} = (2^4)^{\sqrt{3}} = 16^{\sqrt{3}} = ??$

irrational: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Alternativ: $\sqrt{3}^{4 = 2\cdot 2} = (\sqrt{3}^2)^2 = 3^2 = 9$

Noch kurz die

(14) u(e): $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} = \frac{u-\sqrt{3}}{(u+\sqrt{3})}\cdot\frac{u-\sqrt{3}}{(u-\sqrt{3})}$ $\quad \boxed{u = 1+\sqrt{2}}$

2. Binom → $= \frac{\boxed{(u-\sqrt{3})^2}}{(u+\sqrt{3})(u-\sqrt{3})}$ ← 3. Binom

$$= \frac{u^2 - 2\sqrt{3}u + \sqrt{3}^2}{u^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{3}(1+\sqrt{2}) + 3}{(1+\sqrt{2})^2 - 3}$$

$$= \frac{1+2\sqrt{2}+2 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 3}{(1+2\sqrt{2}+2) - 3} = \frac{3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 3}{3 + 2\sqrt{2} - 3}$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{2(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 - \sqrt{6} - \sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 3\sqrt{2} - \sqrt{6} - \sqrt{3}\sqrt{4}}{2}$$

$2 = \sqrt{2}^2$, $\quad 12 = 3\cdot 4$

$$= \frac{2 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

Ergebnis: $\boxed{\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{6}}$

2) Das Logarithmieren als 2. Umkehroperation zum Potenzieren:

Dieses Mal geht es um die „Suche" nach einem geeigneten Exponenten, wenn eine Potenz gegeben und die Basis bekannt ist.

Also: Wir wollen die Gleichung $\boxed{b^x = a}$ für $a>0, b>0$ mit $b \neq 1$ vorgegeben.

Wir schreiben für x dann: $\boxed{x = \log_b a}$ und sprechen vom „Logarithmus von a zur Basis b". Der Wert a heißt auch Numerus (=Zahl)

Beispiel: $x = \log_2 8$ ist dann die (eindeutige) Lösung zu

$$\boxed{2^x = 8 = 2^3} \Rightarrow x = 3 = \log_2 8 \quad !!$$

Dazu Aufgabe

17 Ü(a): $\log_{\underset{\text{Basis}}{2}} \overset{\text{Numerus}}{x} = \overset{\text{Exponent}}{6} \Leftrightarrow 2^6 = x \Leftrightarrow \boxed{x = (2^3)^2 = 8^2 = 64}$

Ü(e): $\log_x 25 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5}$

Ü(i): $\log_5 \sqrt[6]{25} = x \Leftrightarrow 5^x = \sqrt[6]{25} = 25^{1/6} = (5^2)^{1/6} = 5^{2/6} = 5^{1/3}$!! $\Rightarrow \boxed{x = 1/3}$

Für den Logarithmus gelten folgende 3 Logarithmengesetze:

$$\boxed{\begin{array}{l} (1)\ \log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \\ (2)\ \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y \\ (3)\ \log_b(x^a) = a \cdot \log_b x \end{array}}$$

Hausaufgaben zum 13.12. bzw. 15.12.:
17 H(d), H(h), H(l) sowie 18 H(c) + H(f) und
19 H(c) + H(f).

ENDE der Vorlesung !!