# Vorlesung vom 24.11.2016

- Nachtragen den Potenzgesetzen → Aufgaben 12+13 von Blatt 5
- Wurzeln und Radizieren als Umkehroperation des Potenzierens

## 1) Potenzgesetze:

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir $a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$, wobei $a^1 = a$ und $a^0 := 1$. Wir können das auch rekursiv definieren durch:

$$\boxed{a^0 := 1, \quad \underbrace{a^{n+1}}_{(n+1)\text{-te Potenz}} := a \cdot \underbrace{a^n}_{n\text{-te Potenz}}}$$

Rekursive Vorschrift

z.B.: $2^4 = ?$ : $2^0 = 1$, $2^1 = 2 = 2 \cdot 2^0$, $2^2 = 2 \cdot 2^1 = 2 \cdot 2 = 4$, $2^3 = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$,
$2^4 = 2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 8 = 16$, usw.

Algorithmische Schleife: $x = a^n = ?$

$\boxed{x = 1}$ Initialisierung

```
For i = 1,...,n do
    x = a*x
done
```

Englisch!

Schleife, n-mal durchlaufen.

Zusätzlich definieren wir:

$$\boxed{a^{-n} := \frac{1}{a^n}} \quad \text{für } a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$$

z.B.:

$$x = 3 \cdot 10^{-2} = \frac{3}{10^2} = \frac{3}{100} = 0{,}03$$

Dann gilt:

Potenzen zur selben Basis a

(1) $a^n \cdot a^m = \underbrace{\underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{-mal}}\cdot\underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{m\text{-mal}}}_{(n+m)\text{-mal}} = \underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{(n+m)\text{-mal}} = a^{n+m}$

(2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ Denn: Ist $\frac{a^n}{a^m} = a^{r}$ ??, so folgt:

$a^n = a^m \cdot a^r = a^{m+r}$

Da Potenzen zu gegebener Basis $a \neq 0, 1, -1$ eindeutig sind, muss im Fall $a^n = a^{m+r}$ gelten: $n = m + r \Longrightarrow r = n - m$

Noch einmal: Gleichheit von Potenzen zur selben Basis bedingt Gleichheit der Exponenten, oder:

$$\boxed{a^x = a^y \Longrightarrow x = y}\text{, falls } a \notin \{1, 0, -1\}$$

Potenzen mit denselben Exponenten n

(3) $a^n \cdot b^n = \underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{-mal}}\cdot\underbrace{(b\cdot\ldots\cdot b)}_{n\text{-mal}} = \underbrace{(a\cdot b)(a b)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\text{ Paare}} = (ab)^n$

(4) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, denn: $b^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n \underset{(3)}{=} \left(\cancel{b}\cdot\frac{a}{\cancel{b}}\right)^n = a^n$

ACHTUNG: $a^n + b^n \neq (a+b)^n$ // zeigt schon der Fall $n=2$ (1. Binom)

„Doppelpotenzen": Potenz einer Potenz

(5) $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m\text{-mal}} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m\text{-mal}}} = a^{n\cdot m}$

$= a^{m\cdot n} = (a^m)^n$

Die Potenzgesetze (1)–(5) gelten für alle ganzzahligen Exponenten $n \in \mathbb{Z} = \{0, +1, -1, 2, -2, \ldots\}$.

Wir wenden dies nun in 2 Aufgaben vom 5. Blatt an:

12) 4a) $(4a^2 + 3a^{-5} - 2a^3)\cdot 2a^{-4} = \underset{4\cdot 2}{8}a^{2+(-4)} + \underset{3\cdot 2}{6}a^{-5+(-4)} - \underset{2\cdot 2}{4}\cdot a^{3+(-4)}$

$= 8\cdot a^{2-4} + 6a^{-5-4} - 4a^{3-4} = 8\cdot a^{-2} + 6a^{-9} - 4a^{-1}$,

(13) ü(a)

$$\frac{b^2y^2}{a^2x^2}\cdot\left(\frac{b^3y}{a^{12}x^3}\right)^{-2} \overset{(4)}{=} \frac{b^2y^2}{a^2x^2}\cdot\frac{(b^3y)^{-2}}{(a^{12}\cdot x^3)^{-2}} \overset{(3)}{=} \frac{b^2y^2(b^3)^{-2}\cdot y^{-2}}{a^2x^2\cdot(a^{12})^{-2}\cdot(x^3)^{-2}}$$

$$\overset{(5)}{=} \frac{b^2y^2\cdot b^{-6}\cdot y^{-2}}{a^2x^2a^{-24}x^{-6}} \overset{(1)}{=} \frac{b^{2-6}\cdot y^{2-2}}{a^{2-24}\cdot x^{2-6}}$$

$$= \frac{b^{-4}y^0}{a^{-22}\cdot x^{-4}} = a^{+22}\cdot b^{-4}x^4 = \frac{a^{22}\cdot x^4}{b^4}$$

$y^0 = 1$

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

## 2) Wurzeln und Radizieren:

Radix (lat.) – Wurzel

Wir verstehen das Radizieren als erste Umkehroperation zum Potenzieren:

Für $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$ definieren wir $\boxed{x := \sqrt[n]{a}}$ – sprich: n-te Wurzel aus a – als die (geforderte) eindeutige positive Lösung der Potenzgleichung $\boxed{x^n = a}$. Anders interpretiert:

Suche zu einem gegebenen Potenzwert bei gegebenem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ die zugehörige Basis $x$, so dass $x^n = a$ ist.

Ähnlich haben Mathematiker das mit der Subtraktion und Division als Umkehroperation zur Addition bzw. Multiplikation vollzogen:

Etwa: (S) $x = a - b$ ist eindeutige Lösung der Additionsaufgabe $\boxed{x + b = a}$

Subtraktion

(D) $x = \frac{a}{b}$ ist eindeutige Lösung im Fall $b \neq 0$ der Multiplikationsaufgabe $\boxed{x \cdot b = a}$

Analog: $x = \sqrt{4}$ ist die positive Lösung zu $x^2 = 4 = 2^2$

$\Rightarrow x = 2$. Oder $x = \sqrt[4]{81}$ ist positive Lösung

zu $x^4 = 81 = 9^2 = (3^2)^2 = 3^4 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

Oder $x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

ist äquivalent zu

**Beachte:** Das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ ist ein Symbol für die Operation Radizieren. Daher verbirgt sich hinter dem Symbol eigentlich der Buchstabe $r \to \sqrt{\ } \to \sqrt{\ }$

Es gibt wegen dem Zusammenhang zwischen Radizieren und Potenzieren entsprechende Wurzelgesetze. Die fassen wir aber als verallgemeinerte Potenzgesetze auf. Die wichtigste Gleichung ist dabei:

$$(*) \quad \boxed{\big(\underbrace{\sqrt[n]{a}}_{\text{Radizieren}}\big)^{\overbrace{n}^{\text{Potenzieren}}} = a = \sqrt[n]{a^n}} \quad \text{für } a \geq 0,\ n \in \mathbb{N}$$

So kann man jetzt $\sqrt[n]{\ }$ auch als verallgemeinerte Potenz schreiben:

$$?? \quad \sqrt[n]{a} \neq a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad // \quad a^{1/n}\ ??$$

Ist $\sqrt[n]{a} = a^{\lambda}$, so folgt: $a^{1} = a = (\sqrt[n]{a})^n = (a^{\lambda})^n \overset{(5)}{=} a^{\lambda \cdot n}$

Ich möchte n-te Wurzel als Potenz schreiben!!

Eindeutigkeit von Potenzen bei gleicher Basis $a \neq 1$ bedingt Exponentenübereinstimmung: $1 = \lambda \cdot n \Rightarrow \boxed{\lambda = 1/n}$

z.B.: $x = \sqrt[3]{4} = 4^{1/3}$

Wurzelgesetze sind z.B.:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (a \cdot b)^{1/n}$$

Oder

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^{1/m})^{1/n} = a^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$$

15 Ü(a):

$$x = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{\underset{\substack{\shortparallel \\ 3^3}}{27}} = \sqrt[3]{3^3} = \underline{\underline{3}}$$

$\sqrt[n]{a^n} = a$

Hausaufgaben für übernächste Woche:

14 H(c) + H(f), 15 H(e) + H(g) + H(l) + H(m) sowie

16 H(d) + H(g)

ENDE der Vorlesung!