Vorlesung vom 17.11.2016:

- Division von Brüchen – ein Beispiel
- Polynomdivision = Division mit Rest verallgemeinert
- Potenzgesetze

1) Nachtrag zur Bruchrechnung: die Division von Quotiententermen:

Regel: $\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}$ für $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$

Kehrwert zu $\frac{c}{d}$

Warum so?

Setzen wir einmal $x = \frac{a/b}{c/d}$. Dann ist x (eindeutige) Lösung der Gleichung $x \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$. Allgemein ist ja $x = \frac{u}{v}$ Lösung der Gleichung $\boxed{x \cdot v = u}$.

Aber zu dieser Gleichung ist gerade $\boxed{x = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}$

z.B.: $x = \frac{3}{4}$ ist Lösung zur Gleichung $4x = 3$.

die gesuchte Lösung, denn: $x \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\cancel{d}}{b\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{d}} = \frac{a}{b}$ ✓

Dazu die Aufgabe

(10) Ü(a)

Addition bzw. Subtraktion in Zähler u. Nenner

$$\frac{1 - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}} = \frac{\frac{1 \cdot a - 1}{a}}{\frac{1 \cdot a - 1}{a^2}} = \frac{\cancel{a-1}}{a} \cdot \frac{a^2}{\cancel{a-1}} = \frac{a^{\cancel{2}}}{\cancel{a}} = \underline{\underline{a}}$$

Kehrwert

2) Die Division mit Rest von Termen: Polynomdivision (= PD):

Wir haben bereits in der Schule kennengelernt: die Division mit Rest. Und wir haben das auch bei den verschiedenen Zahldarstellungen verwendet – genauer: bei der Umwandlung einer Dezimalzahl in eine b-adische Darstellung bezüglich einer Basis $b \neq 10$.

Beachte: Gemischte Brüche sind das Ergebnis einer solchen Division mit Rest:

$$\frac{241}{13} = 18\tfrac{7}{13} = 18 + \frac{7}{13} \quad \text{mit } 18 = 241 \text{ DIV } 13, \quad 7 = 241 \text{ MOD } 13$$

ganzzahliger Anteil!

Rest

Das lässt sich nun auf „Polynom"terme verallgemeinern. Wenn man Glück hat, geht die Division auf (Rest = 0). Dazu erinnern wir uns an die schriftliche Division:

$$\begin{array}{rl}
 & 241 : 13 = 18 \text{ R } 7 \\
- & 13 \quad \downarrow 0 \\
 & 111 \\
- & 104 \quad \downarrow 0 \\
 & 7
\end{array}$$

NR: $\frac{24}{13} \approx 1$, $\frac{111}{13} \approx 8$

Also: $241 = 18 \cdot 13 + 7 \Rightarrow \frac{241}{13} = 18 + \frac{7}{13} = 18\tfrac{7}{13}$

Jetzt übertragen auf Terme:

3. Binom

$$\frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{\cancel{(a+b)}(a-b)}{\cancel{a+b}} = a-b$$

Dies jetzt mit PD:

$$\begin{array}{rl}
 & (a^2-b^2) : (a+b) = a-b \\
- & a^2+ab \quad \downarrow 0 \\
 & 0 - ab - b^2 \\
- & -ab-b^2 \quad \downarrow 0 \\
\text{Rest:} & 0
\end{array}$$

$(a+b)\cdot(-b)$

NR: $\frac{a^2}{a} = a \approx \frac{a^2-b^2}{a+b}$

$\frac{-ab}{a} = -b \approx \frac{-ab-b^2}{a+b}$

Mittels PD haben wir berechnet: $\frac{a^2-b^2}{a+b} = a-b$

Ein weiteres Beispiel:

$$(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2$$
$$\begin{array}{rl} -| & a^3-a^2b \\ \hline & +a^2b-b^3 \\ -| & a^2b-ab^2 \quad (a-b)\cdot ab \\ \hline & 0+ab^2-b^3 \\ -| & ab^2-b^3 \quad (a-b)\cdot b^2 \\ \hline \end{array}$$

Rest $\rightarrow$ 0

NR:
$$\frac{a^3}{a}=a^2 \approx \frac{a^3-b^3}{a-b}$$
$$\frac{a^2b}{a}=ab \approx \frac{a^2b-b^3}{a-b}$$
$$\frac{ab^2}{a}=b^2 \approx \frac{ab^2-b^3}{a-b}$$

Fazit: Die PD geht restlos auf. Es gilt:

$$\boxed{\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2}$$

Probe: $(a^2+ab+b^2)\cdot(a-b)$
$$=a^3+\cancel{a^2b}+\cancel{ab^2}-\cancel{a^2b}-\cancel{ab^2}-b^3$$
$$=a^3-b^3 \checkmark$$

Nun noch folgende 2 Beispiele:

a) $(21x^2+2xy+3xz-8y^2+2yz):(3x+2y)=7x-4y+z$
$$\begin{array}{rl} -| & 21x^2+14xy \\ \hline & 0-12xy+3xz-8y^2+2yz \\ -| & -12xy \qquad -8y^2 \quad -4y\cdot(3x+2y) \\ \hline & 0 \;+3xz+0+2yz \\ -| & 3xz \qquad +2yz \\ \hline \end{array}$$

Rest $\rightarrow$ 0

NR:
$$\frac{21x^2}{3x}=7x$$
$$-\frac{12xy}{3x}=-4y$$
$$\frac{3xz}{3x}=z$$

Fazit: PD geht restlos auf. Also:

$$\boxed{\frac{21x^2+2xy+3xz-8y^2+2yz}{3x+2y}=7x-4y+z}$$

b) $(21x^2+xy+3xz-8y^2+2yz):(3x-2y)=7x+5y+z$
$$\begin{array}{rl} -| & 21x^2-14xy \\ \hline & 15xy+3xz-8y^2+2yz \\ -| & 15xy \qquad -10y^2 \end{array}$$

NR:
$$\frac{21x^2}{3x}=7x$$
$$\frac{15xy}{3x}=5y$$

$$
\begin{array}{rl}
0 & +3xz+2y^2+2yz \\
-\,| & 3xz \qquad\;\; -2yz \\
\hline
0 & +2y^2+4yz \quad \text{Rest}
\end{array}
\qquad\qquad \frac{3xz}{3x} = z
$$

Fazit: PD geht nicht auf. Es gilt aber:

$$\boxed{\frac{21x^2+xy+3xz-8y^2+2yz}{3x-2y} = \underbrace{(7x+5y+z)}_{\text{„ganzer" Anteil}} + \underbrace{\frac{2y^2+4yz}{3x-2y}}_{\text{Restteil !!}}}$$

Probe: $\underbrace{(7x+5y+z)(3x-2y)}_{} + \underbrace{2y^2+4yz}_{\text{Rest}} \overset{??}{=} 21x^2+xy+3xz-8y^2+2yz$ ✓

$$= 21x^2+15xy+3xz$$
$$\quad -14xy-10y^2-2yz$$

3) Potenzgesetze:

Es gilt, wenn man definiert $a^n := \underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{-mal}}$ für $n\in\mathbb{N}$ sowie $a^0 := 1$, $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $n\in\mathbb{N}$, dann gelten folgende Gesetze:

(1) $$\boxed{a^n\cdot a^m} = \underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{-mal}}\underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{m\text{-mal}} = \boxed{a^{n+m}}$$

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}, \text{ denn: } a^{n-m}\cdot a^m = a^{(n-m)+m} = a^n \checkmark$$

(2) $$\boxed{a^n\cdot b^n} = \underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{-mal}}\underbrace{(b\cdot\ldots\cdot b)}_{n\text{-mal}} = \underbrace{(ab)(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\text{-mal}} = \boxed{(ab)^n}$$

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

(3) $$\boxed{(a^n)^m} = \underbrace{a^n\cdot\ldots\cdot a^n}_{m\text{-mal}} = a^{\overbrace{n+\ldots+n}^{m\text{-mal}}} = a^{n\cdot m} = \boxed{(a^m)^n}$$

Mehr zu Potenzgesetzen kommende Woche.

Hausaufgaben zu übernächster Woche:

11 H(c), H(f), 12 H(d), H(g) sowie 13 H(d), H(e)

ENDE der Vorlesung !