Vorlesung vom 10.11.2016:

- Gesetze der Bruchrechnung
- Polynomdivision in allgemeiner Form (= verallgemeinerte Division mit Rest)

1) Rechenregeln für Brüche:

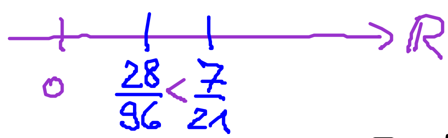
a) Erweitern/Kürzen:

Gleichheit von Brüchen: $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d = bc}$

z.B.: $\frac{28}{96} \overset{?}{=} \frac{7}{21} \Leftrightarrow \underbrace{28\cdot 21}_{=588} \overset{?}{=} \underbrace{7\cdot 96}_{=672}$ ↯

Also: $\frac{28}{96} \neq \frac{7}{21}$. Mehr noch:

$$28\cdot 21 = 588 < 672 = 7\cdot 96$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{28}{96} < \frac{7}{21}$$



Wegen der Gleichheit von Brüchen ist

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a\cdot c}{b\cdot c}} \quad \text{für } c \neq 0$$

Denn: $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot c)\cdot b$ ✓

$\longrightarrow$ Erweitern

$\longleftarrow$ Kürzen

b) Multiplikation:

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

c) Division: $\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}$ $= \frac{ad}{bc}$

Denn: $x = \frac{a/b}{c/d}$ ist Lösung von $\boxed{x \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}}$; $x = \frac{ad}{bc}$ tut's!!

d) Addition/Subtraktion:

$$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad \pm bc}{bd}}$$

Erweitern

Wichtig: Vor der Addition/Subtraktion müssen beide Bruchterme auf den gemeinsamen Hauptnenner gebracht werden.

Z.B.: $\frac{2}{9} + \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{18} = \frac{4 + 15}{18} = \frac{19}{18}$

HN kgV = kleinstes gemeinsames Vielfaches

Noch 2 Beispiele zur Bruchrechnung vom 3. Aufgabenblatt:

7 Ü (f) als Alternativweg:

$$\frac{(a^2-b^2)^2 - (a^2+b^2)^2}{ab(a+b)} = \ldots = \frac{-4a^2b^2}{ab(a+b)} = -\frac{4ab}{a+b}$$

direktes Ausrechnen ✓✓

Alternativ: Zählerterm ist von der Form $\boxed{u^2 - v^2}$ für $\boxed{u = a^2 - b^2, \; v = a^2 + b^2}$

3. Binom

Mit dem 3. Binom folgt:

$$\frac{(a^2-b^2)^2 - (a^2+b^2)^2}{ab(a+b)} = \frac{u^2 - v^2}{ab(a+b)} = \frac{(u-v)\cdot(u+v)}{ab(a+b)}$$

$$= \frac{[(\cancel{a^2}-b^2) - (\cancel{a^2}+b^2)] \cdot [(a^2-\cancel{b^2}) + (a^2+\cancel{b^2})]}{ab(a+b)}$$

$$= \frac{[-b^2-b^2]\cdot[a^2+a^2]}{ab(a+b)} = \frac{(-2b^2)(2a^2)}{ab(a+b)}$$

$$= \frac{-4a^{\cancel{2}}b^{\cancel{2}}}{\cancel{ab}(a+b)} = -\frac{4ab}{a+b}$$

---

7) Ü(g)

$$\frac{(a^2+b^2)^2\cdot(a^2-b^2)^2+4a^4b^4}{a^4+b^4} = \frac{[(a^2+b^2)(a^2-b^2)]^2+4a^4b^4}{a^4+b^4}$$

$u^2\cdot v^2 = (u\cdot v)^2$

3. Binom: $(u+v)(u-v)$ für $u=a^2$, $v=b^2$

$$= \frac{[(a^2)^2-(b^2)^2]^2+4a^4\cdot b^4}{a^4+b^4} = \frac{(a^4-b^4)^2+4a^4b^4}{a^4+b^4}$$

$x=a^4$, $y=b^4$

$$= \frac{(a^4)^2-2a^4b^4+(b^4)^2+4a^4b^4}{a^4+b^4} = \frac{a^8-2a^4b^4+b^8+4a^4b^4}{a^4+b^4}$$

2. Binom

$$= \frac{a^8+2a^4b^4+b^8}{a^4+b^4} = \frac{(a^4+b^4)^{\cancel{2}}}{\cancel{a^4+b^4}} = a^4+b^4$$

1. Binom

8) Ü(a)

3. Binom!

$$\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a} = \frac{(2a+3b)(2a-3b)}{7a^2(3b+2a)}\cdot\frac{a(7+5b)}{2(3b-2a)}$$

Stichwort: Faktorisierung!!

$$= \frac{\cancel{(2a+3b)}\cdot\cancel{(2a-3b)}\cdot\cancel{a}\cdot(7+5b)}{7a^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(2a+3b)}\cdot(-2)\cdot\cancel{(2a-3b)}}$$

$$= \frac{7+5b}{-14a} = -\frac{7+5b}{14a}$$

Jetzt Addieren / Subtrahieren mit Hauptnenner:

9) Ü(a)

$$\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2} = \frac{a+2b}{3a(a-b)}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2b(a-b)}$$

1. Schritt: Nenner faktorisieren

2. Schritt: Hauptnenner finden

HN finden: $3a^2-3ab = 3a(a-b)$

$2b = 2b$

Erweitern

$$= \frac{(a+2b)\cdot 2b-1\cdot 3a(a-b)}{3a\cdot 2b\cdot(a-b)} - \frac{(3b-a)\cdot 3a}{}$$

$$2ab-2b^2 = (a-b)\cdot 2b$$

HN = kgV: $\boxed{3a\cdot 2b(a-b)}$

$3a\cdot 2b\cdot(a-b)$

$$= \frac{(a+2b)\cdot 2b - 3a(a-b) - (3b-a)\cdot 3a}{3a\cdot 2b(a-b)}$$

$$= \frac{2ab+4b^2-\cancel{3a^2}+3ab-9ab+\cancel{3a^2}}{6ab(a-b)}$$

$$= \frac{-4ab+4b^2}{6ab(a-b)} = \frac{-\cancel{4}\cancel{b}\cdot\cancel{(a-b)}}{\cancel{6}a\cancel{b}\cancel{(a-b)}} = \frac{-2}{3a}$$

Fazit:

$$\boxed{\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2} = -\frac{2}{3a}}$$

Hausaufgaben zum 22.11. bzw. 24.11.:

9 H(d) und 10 H(d), H(e) !!

ENDE der Vorlesung !!