Vorlesung vom 3. 11. 2016:

- Binomische Formeln „rückwärts" gedacht
- Gesetze (Regeln) der Bruchrechnung

1) Binomische Formeln:

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}}$$

1. Binom
2. Binom
3. Binom // Wichtig!!

„Kunst" einer Mathematikerin / eines Mathematikers besteht im „Rückwärts-buchstabieren" der Binomischen Formeln, d.h. das von Rechts- nach Links-lesen! Auf diese Weise werden spezielle Summen bzw. Differenzen faktorisiert.

Dazu als Beispiele:

A 5 Ü(a): $\boxed{49a^2-42a+9 = (7a-3)^2}$

„riecht" nach 2. Binom!!

$$u^2-2uv+v^2 = (u-v)^2$$

$(-)\cdot(-)$

NR:

$$\boxed{u^2=49a^2 \Rightarrow u=\sqrt{49a^2}=7a}$$

$$\boxed{v^2=9 \Rightarrow v=\sqrt{9}=3}$$

$$2uv=2\cdot 7a\cdot 3 = 42a$$

Ü(d): $\underbrace{u^2-2uv+v^2}_{\text{2. Binom!}}-2u+2v+1$

$= (u-v)^2-2(u-v)+1$

// Blackbox bzw. Substitution: $\boxed{z=u-v}$

$= \underbrace{z^2-2z+1}_{\text{2. Binom!}} = (z-1)^2 = [(u-v)-1]^2 = (u-v-1)^2$

$\boxed{z=u-v}$

$(-)(+)=(-)$

Ü(e): $\underbrace{a^2+2ab+b^2}_{\text{1. Binom!}}-6a-6b+9 = (a+b)^2-6(a+b)+9$

// Blackbox: $\boxed{k=a+b}$

$= k^2-6k+9 = (k-3)^2 = ((a+b)-3)^2$

2. Binom! $\qquad = (a+b-3)^2$

2) Quadratische Ergänzung:

$$\underbrace{u^2-4u}_{\text{unvollständiger 2. Binom!}} = u^2-\underbrace{4u}_{=2uv} = u^2-2uv+\underbrace{v^2-v^2}_{=0} = \underbrace{u^2-4u+4}_{\text{vollständiger 2. Binom!}}\underbrace{-4}_{=0}$$

$=2uv \Rightarrow \boxed{v=\frac{4u}{2u}=2}$

$v^2 = 4$ ← ergänztes Quadrat!!

$$= (u-2)^2-4$$

Anwendung dieses Verfahrens in Aufgabe

⑥ Ü(a) $4a^2-12a+9b^2-24b=0$ // Gleichung!!

Ziel: Gleichung der Gestalt $A^2 \pm B^2 = s$ mit $s\in\mathbb{R}$, A, B geeignete Terme

Packen wir's an oder: „go on“:

$$\underbrace{4a^2-12a}_{\text{unvollst. 2. Binom}}+\underbrace{9b^2-24b}_{\text{unvollst. 2. Binom}}=0$$

// NR-Ecke:

$4a^2-12a = u^2-2uv$

$\Downarrow$

$\boxed{u=2a}$, $2uv=12a$

$\Downarrow$

$4av=12a$

$\Downarrow$

$\boxed{v=\frac{12a}{4a}=3}$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\left[(4a^2-12a+9)-9\right]}_{(u^2-2uv+v^2)-v^2}+\underbrace{\left[(9b^2-24b+16)-16\right]}_{x^2-2xy+y^2-y^2}=0$$

NR: $x^2=9b^2 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{9b^2}=3b}$, $2xy = 2\cdot 3by = 6by \overset{!}{=} 24b$

$\Rightarrow \boxed{y=\frac{24\cancel{b}}{6\cancel{b}}=\frac{24}{6}=4}$

$$\Longleftrightarrow \left[(2a-3)^2-9\right]+\left[(3b-4)^2-16\right]=0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{(2a-3)^2+(3b-4)^2=25} \quad +9+16$$

$$A^2 + B^2 = s$$

ENDE der Vorlesung!