Vorlesung vom 27.10.2016:

- Thema heute: Termodynamik [= Termumformungen]

Es gibt folgende Rechengesetze bei reellen Zahlen:

	Addition	Multiplikation
Assoziativität	$x+(y+z)=(x+y)+z$	$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
Kommutativität	$x+y=y+x$	$x\cdot y=y\cdot x$
Neutrale Element	$x+\underline{\underline{0}}=x$ additiv neutral	$x\cdot\underline{\underline{1}}=x$ multiplikativ neutral
Inverse Elemente	$\boxed{x+(-x)=\underline{\underline{0}}}$	$\boxed{x\cdot \underbrace{x^{-1}}_{\text{„}\frac{1}{x}\text{"}}=\underline{\underline{1}}}$ $(x\neq 0)$
Distributivität	$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$	

1. Operation 1. Operation

2. Operation 2. Operation

Man spricht im Fall von $\mathbb{R}$ auch vom „reellen Zahlenkörper". Es gibt schon einen „kleineren" Zahlbereich, der diese angegebenen Gesetze erfüllt, nämlich $\mathbb{Q}=\{x=\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0\}$

Quotient „mit der Eigenschaft"

als „rationaler Zahlenkörper"

Aus den „Grundgesetzen" – Mathematiker würden das „Axiome" nennen – folgen weitere Gesetze, die beweisbar sind.

z.B.: $\boxed{x\cdot(-y)=(-x)\cdot y=-x\cdot y=-(xy)}$

Dies ist das additiv inverse Element

zum Produkt $\underline{xy}$, also:

$$xy + (-xy) = 0,$$

Ebenso: $xy + x\cdot(-y) = x\cdot\underbrace{(y+(-y))}_{=0} = x\cdot 0 = 0$

(??)

$$\Downarrow$$

$$x\cdot(-y) = -xy$$ ist ein und dasselbe additive Inverse zu xy !!

Schließen wir noch die „Beweislücke": $\boxed{x\cdot 0 = 0}$

Es gilt: $x\cdot\underset{NE}{0} = x\cdot\underbrace{(0+0)}_{=0} \overset{!}{\underset{DG}{=}} x\cdot 0 + x\cdot 0 \quad | -x\cdot 0$ bzw. $+(-x\cdot 0)$

$$0 \underset{IE}{=} \underbrace{x\cdot 0 + (-x\cdot 0)}_{=0} \overset{!}{=} \{x\cdot 0 + x\cdot 0\} + (-x\cdot 0)$$

$$\underset{AG}{=} x\cdot 0 + \underbrace{\{x\cdot 0 + (-x\cdot 0)\}}_{=0}$$

$$\underset{IE}{=} x\cdot 0 + 0 \underset{NE}{=} x\cdot 0$$

Weiter kann man beweisen:

$x(-y) = (-x)\cdot y = -(x\cdot y) = -x\cdot y$, $(-x)\cdot(-y) = \underline{xy}$

Haben wir gesehen!

Das sind die Vorzeichenregeln: $\boxed{\begin{array}{c}(+)\cdot(-) = (-)(+) = (-)\\ (-)\cdot(-) = (+)\cdot(+) = (+)\end{array}}$

Weiterhin:

$$\boxed{x\cdot y = 0 \implies x = 0 \text{ oder } y = 0}$$

$$\Leftarrow$$

schließt den Fall „und" mit ein !!

Beweis:

Sei $xy=0$ und sei o.B.d.A. $y \neq 0$. Dann existiert zu y das multiplikativ Inverse $y^{-1}=\frac{1}{y}$, und es gilt: $y \cdot y^{-1} = 1$.

„ohne Beschränkung der Allgemeinheit"

<u>Also</u>: $x \cdot y = 0 \Longrightarrow (x \cdot y) \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1} \overset{KG}{=} y^{-1} \cdot 0 = 0$

$\cdot y^{-1}$

$\overset{AG}{=} x(\underbrace{y \cdot y^{-1}}_{=1}) \overset{IE}{=} x \cdot 1 \overset{NE}{=} x$

Also ist gerade bewiesen worden:

$$\boxed{x \cdot y = 0 \wedge y \neq 0 \Longrightarrow x = 0}$$

„und"

Hintergrund für die Wichtigkeit dieses Rechengesetzes:
Oft ist eine Nullgleichung zu lösen. „Term $\overset{!}{=} 0$".
Dann lautet das „Zauberwort" „Faktorisierung", d.h. stelle den Term als Produkt dar. Dann löst man die Gesamtgleichung, indem man die Einzelfaktoren auf Null „untersucht.

<u>Beispiel</u>: $x^2 = 1 \Longrightarrow \boxed{x^2 - 1 = 0}$ 3. Binom! $\Longrightarrow x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \overset{\text{"}}{} 0$

-1 Term Nullgleichung

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

<u>Also</u>: $x^2 - 1 = \underbrace{(x+1)}_{u} \cdot \underbrace{(x-1)}_{v} = 0$

$\Longrightarrow u = x+1 = 0$ oder $v = x-1 = 0$

$\Longrightarrow \boxed{x = -1 \quad \text{—"—} \quad x = +1}$

Dazu Aufgabe

<u>3 Ü(e)</u>: $a^2b + ac - ab - c = a \cdot (ab + c - b) - c$

$= a \cdot (ab + c - b)$

Das kann es nicht sein, da eine Summe bleibt!!

$$\underbrace{a^2b+ac}-\underbrace{ab-c} = a\cdot(ab+c)-(ab+c) = au-1\cdot u \quad \text{mit} \quad \boxed{u=ab+c}$$

blackbox!!

$$= (a-1)\cdot u$$

$$\boxed{= (a-1)\cdot(ab+c)}$$

Beachte: $xy+y = y(x+1)$

$xy-y = y(x-1)$

$(a+u)\cdot(-u) = -au-u^2$, $-au = a\cdot(-u)$, $-u^2 = u\cdot(-u)$

Aus den Rechengesetzen folgen die „berühmten" Binomischen Gesetze:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$$

$$= (a+b)\cdot(a+b)$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$$

$$(a-b)(a-b)$$

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2-b^2}$$

Wichtig!

Zum 8.11. bzw 10.11. (Übung):

Hausaufgaben: H-Teile zu 2 bis 5 !!

ENDE der Vorlesung!