Vorlesung vom 25.10.2016:

- Fortführung der Zahldarstellung in b-adischen Stellenwertsystemen

Bisher hatten wir z.B.:

$$\boxed{x = (3A5)_{\underset{\text{Basis } b}{11}}} = 3\cdot \underbrace{11^2}_{=121} + \underbrace{10}_{=A}\cdot \underbrace{11^1}_{=11} + 5\cdot \underbrace{11^0}_{=1} = 3\cdot 121 + 10\cdot 11 + 5\cdot 1$$

$$= 363 + 110 + 5 = 478$$

Probe mittels Horner:

	3	$10 = A$	5
$\cdot b \mid \cdot 11$	0	33	473
$+$	3	43	478

$= (478)_{10}$ Dezimalsystem!

Frage: Wie kann ich umgekehrt eine Dezimalzahl in ein anderes b-adisches System mit Basis $b \neq 10$ umwandeln?

Antwort: Mittels fortgesetzter Division mit Rest durch die neue Basis $b \neq 10$.

Denn: $x = (3A5)_{11} = 3 \cdot 11^2 + \underset{A}{10} \cdot 11 + 5 \cdot 1$

$$= (3 \cdot 11 + 10) \cdot 11 + 5 = a \cdot 11 + 5 \quad // \quad a = 3 \cdot 11 + 10$$

$$= [(0+3) \cdot 11 + 10] \cdot 11 + 5 = 478 = (478)_{10}$$

Also: (*)

$$\boxed{\begin{aligned} 478 &= a \cdot 11 + 5 \\ a = 43 &= b \cdot 11 + 10 \\ b = 3 &= c \cdot 11 + 3 \end{aligned}}$$

, $a = 3 \cdot 11 + 10 = 43$

, $b = 0 + 3 = 0 \cdot 11 + 3$

, $c = 0$ Abbruch!

Fortgesetzte Division mit Rest durch $b = 11$

Wir führen jetzt 2 Operatoren ein: DIV, MOD

a DIV b ist ganzzahlige Anteil von b in a

a MOD b ist Rest bei ganzzahliger Division von a durch b

z.B.:
$$\left.\begin{aligned} 28 \text{ DIV } 7 &= 4 \\ 28 \text{ MOD } 7 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ denn: } \boxed{28 = 4 \cdot 7 + 0}$$

$28 \text{ DIV } 9 = \underline{\underline{3}}$

$28 \text{ MOD } 9 = \underline{\underline{1}}$

$\Big\}$ denn: $28 = \underline{\underline{3}} \cdot 9 + \underline{\underline{1}}$

Das wenden wir eigentlich bei gemischten Brüchen an:

$$x = \frac{723}{20} = 36\frac{3}{20} = 36 + \frac{3}{20} = \frac{36 \cdot 20 + 3}{20}$$

Zurück zum Ausgangsbeispiel:

x	DIV 11	MOD 11
478	$\underline{\underline{43}}$	$\underline{\underline{5}}$
43	3	$10 \mathrel{\hat{=}} A$
3	$\underline{\underline{0}}$	3

Abbruch!

Ziffern!

// $478 = \underline{\underline{43}} \cdot 11 + \underline{\underline{5}}$

// $43 = 3 \cdot 11 + 10$

// $3 = 0 \cdot 11 + 3$

Also: $478 = (478)_{10} = (3A5)_{11}$

Dazu nun speziell das Binärsystem / Dualsystem zur Basis $b=2$. Es gibt nur 2 Ziffern: 0, 1.

„Witz": Es gibt 10 Sorten von Leuten: Die, welche Binärzahlen verstehen, und die, welche sie nicht verstehen...

$$\underline{\underline{10}} = (10)_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2 + 0 = \underline{\underline{2}} = (2)_{10}$$

Konkretes Umrechnungsbeispiel:

Aufgabe 2 Ü(a):

$x = 333 = (333)_{10} = (???)_2$

Mit DIV-MOD-Algorithmus:

x	DIV 2	MOD 2
333	166	1
166	83	0
83	41	1
41	20	1
20	10	0
10	5	0
5	2	1
2	1	0
1	0	1

Abbruch!

Dann: $\boxed{x = 333 = (333)_{10} = (101.001.101)_2}$

Zur kürzeren Darstellung von Binärzahlen bieten sich Basen der Form $b = 2^s$ – also Zweierpotenzen – an.

$s=2$: $b = 2^2 = 4$ — wird heute nicht mehr benutzt, $s = 3$: $\boxed{b = 2^3 = 8}$ Oktalsystem!!

$s=4$: $\boxed{b = 2^4 = 16}$ Hexadezimal-system!!

Insbesondere $b = 16$ tritt bei der Codierung von Zeichen im sogenannten ASCII Standardcode auf.

Aus der Binärzahl entsteht durch 3er-Blockbildung die zugehörige Oktalzahl, durch 4er-Blockbildung entsprechend die zugehörige Hexadezimalzahl.

z.B.:

3. 2. 1. // Blocknummern!

$$x = 333 = (\underbrace{101}.\underbrace{001}.\underbrace{101})_2$$

Oktalziffern!!

Oktal!

1., 3.: $\boxed{(101)_2} = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 = 4 + 1 = \underline{\underline{5}}$

2.: $\boxed{(001)_2} = 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 0\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 = \underline{\underline{1}}$

Also: $\boxed{x = 333 = (101.001.101)_2 = (515)_8}$

Probe:

	5	1	5
·8	0	40	328
+	5	41	333

Jetzt für $b = 16$:

$$x = 333 = (\underbrace{1}_{3.}\underbrace{01.00}_{2.}\underbrace{1.101}_{1.})_2$$

1.: $\boxed{(1101)_2} = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 1\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 = 8 + 4 + 1 = 13 \mathrel{\hat=} \underline{\underline{D}}$

$(13)_{10}$

2.: $\boxed{(0100)_2} = 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 = \underline{\underline{4}}$

3.: $\boxed{(0001)_2} = 1\cdot 2^0 = 1\cdot 1 = \underline{\underline{1}}$

Führende Nullen!

Also gilt: $\boxed{x = 333 = (333)_{10} = (14D)_{16}}$

<u>Probe</u> (Horner):

	1	4	13
$\cdot 16$	0	16	320
$+$	1	20	$\underline{\underline{333}}$ ✓

Warum funktioniert das Verfahren mit der Blockbildung?
Das zeigt unser Beispiel:

$$x = (101.001.101)_2 = 1\cdot 1 + 1\cdot 4 + 1\cdot 8 + 1\cdot 64 + 1\cdot 256$$

$1 = 2^0$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $64 = 2^6$, $256 = 2^8$

$2^3 = 8$
$2^6 = (2^3)^2 = 8^2$

$$= 1 + 4 + 8 + 64 + 256$$
$$= (1+4) + 8\cdot\underbrace{(1+0)}_{} + \underbrace{8^2}_{64}\cdot\underbrace{(1+4)}_{}$$
$$= 5 + \underbrace{1}_{}\cdot 8 + \underbrace{5}_{}\cdot 8^2$$

Donnerstag dann mehr...

ENDE der Vorlesung!