Exkurs: Grundlagen der Naiven Mengenlehre

Da wir inzwischen öfter den Begriff der Menge und Schreibweisen der Mengenlehre verwendet haben, soll an dieser Stelle ein kurzer Exkurs zur (naiven) Mengenlehre erfolgen. Die Mengenlehre liefert sozusagen die universelle Basis für die Sprache der Mathematik.

<u>Definition</u> der Menge nach Georg Cantor (1895):

„*Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente von M genannt werden, zu einem Ganzen*."

Dabei gelten folgende *Regeln*:

- Von der „Definition" Cantors ausgehend soll von einem beliebigen Objekt a eindeutig aussagbar sein, ob es zu einer gegebenen Menge M gehört bzw. *Element der Menge* ist oder nicht. In Zeichen:

  $\boxed{a \in M}$: *„a ist Element der Menge M"* bzw. *„a gehört zu M"* bzw. *„a ist aus M"*

  $\boxed{a \notin M}$: *„a ist <u>nicht</u> Element der Menge M"* bzw. *„a gehört <u>nicht</u> zu M"* bzw. *„a ist <u>nicht</u> aus M"* .

- Zur Kennzeichnung der Menge als *Zusammenfassung* von Objekten verwendet man die *geschweiften Mengenklammern* „ { " und „ } " . Dabei unterscheidet man zur Beschreibung der Menge das

  a) das *aufzählende Verfahren:*

  Die Menge wird durch explizite Aufzählung ihrer Elemente beschrieben, wobei es hierbei auf die Reihenfolge der Elemente *nicht* ankommt und es gleichgültig ist, ob ein Element *mehrfach* aufgezählt wird oder nur *einfach*. Damit gilt z.B.:

  $$A = \{2, 3, 5, 7\} = \{5, 3, 7, 2\} = \{2, 3, 3, 5, 2, 7, 5, 5\}$$

  Im Falle *unendlicher* Mengen oder größerer *endlicher* Mengen verwendet man das Symbol „…" , um Platz zu sparen, wenn für die in der Menge zusammengefaßten Objekte ein eindeutiges Bildungsgesetz erkennbar ist.

  b) das *beschreibende Verfahren:*

  Ausgehend von einer *Grundmenge* G werden die Elemente, welche zur betrachteten Menge gehören, durch eine (oder mehrere) *Eigenschaften* in Form einer Aussageform $p(x)$ beschrieben, welche für einige Objekte x *wahr* ist, für andere *falsch*. In Zeichen:

  $\boxed{A = \left\{ x \in G \mid p(x) \right\}}$: *„A ist die Menge aller x aus G, für die $p(x)$ wahr ist"*.

  Insbesondere gilt dann: $a \in A \Leftrightarrow p(a)$ ist *wahr*,
  $a \notin A \Leftrightarrow p(a)$ ist *falsch*.

  Auch spielt es keine Rolle, wie die *Individuenvariable* genannt wird, und es kann anstelle von „ / " zuweilen auch „ : " bzw. „ ; " verwendet werden. Also gilt z.B.

  $$A = \{x \in G \mid p(x)\} = \{t \in G \mid p(t)\} = \{y \in G : p(y)\} = \{m \in G ; p(m)\}$$

- Zugelassen ist auch die Menge, die *kein* Element enthält, die sogenannte *leere Menge*. In Zeichen: $\boxed{\emptyset := \{\}}$ bzw. $\boxed{\emptyset := \left\{ x \in G \mid x \neq x \right\}}$.

- Ist x ein beliebiges Objekt, so nennt man die Menge $\boxed{A = \{x\}}$ die zu x gehörige *Elementarmenge* oder *Einermenge*. Zu unterscheiden ist hierbei deutlich zwischen der *Menge* $\{x\}$ und dem *Element* x .

Wir kommen im folgenden nun zu zwei wesentlichen Mengenbeziehungen.

<u>*Definition:*</u>
Seien A und B zwei Mengen mit Elementen aus einer Grundmenge G .

1) A heißt *Teilmenge* (oder *Untermenge*) *von* B bzw. B eine *Erweiterungsmenge* (oder *Obermenge*) *von* A (in Zeichen: $\boxed{A \subseteq B}$), falls für alle $x \in G$ gilt:
   $x \in A \Rightarrow x \in B$ (d.h. *wenn* x in A , *dann* auch x in B).
2) A und B heißen *gleich* (in Zeichen: $\boxed{A = B}$), falls für alle $x \in G$ gilt:
   $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ (d.h. x in A *genau dann, wenn* x in B).

Für die Teilmengenrelation „$\subseteq$“ gelten folgende wichtigen Eigenschaften:

- $\boxed{\varnothing \subseteq A}$ für alle Mengen A . Damit ist die Sonderstellung der leeren Menge $\varnothing$ erklärt.
- $\boxed{A \subseteq A}$ für alle Mengen A . Damit ist die Teilmengenbeziehung *reflexiv*.
- $\boxed{A \subseteq B \text{ und } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C}$ für alle Mengen A, B und C . Damit ist die Teilmengenbeziehung *transitiv*.
- $\boxed{A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A}$ für alle Mengen A und B . Damit ist die *Gleichheit* von Mengen *mittels* der *Teilmengenbeziehung* beschrieben. Tatsächlich wird die Gleichheit zweier Mengen A und B konkret oft durch Nachweis der doppelten Teilmengenbeziehung hergeleitet.
- Man kann auch zu einer gegebenen Menge A alle ihre Teilmengen zu einer neuen Menge von Mengen zusammenfassen, der sogenannten *Potenzmenge von* A . In Zeichen:
  $$\boxed{\wp(A) := \{ M \mid M \subseteq A \}} \; .$$

Man beachte: Die Elemente von $\wp(A)$ sind selbst wieder Mengen!!! Speziell gilt hierbei immer: $\boxed{\wp(A) \neq \varnothing}$, denn es ist $\boxed{\varnothing \in \wp(A)}$ wegen $\varnothing \subseteq A$ sowie $\boxed{A \in \wp(A)}$ wegen $A \subseteq A$.

Seien im folgenden A und B beliebige Teilmengen einer Grundmenge G . Dann lassen sich folgende spezielle *Mengenoperationen* einführen, um aus A und B neue Mengen zu erzeugen:

Mengenoperationen:	
Schnittmenge / Durchschnitt:	$A \cap B := \{ x \in G \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$ <u>*Spezialfall:*</u> $A \cap B := \varnothing$; dann heißen A und B *disjunkt*.
Vereinigungsmenge / Vereinigung:	$A \cup B := \{ x \in G \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$

Differenzmenge / Differenz:	$A \setminus B := \{\ x \in G \mid x \in A \text{ und } x \notin B\ \}$
Komplementärmenge / Komplement von G	$A' := G \setminus A = \{\ x \in G \mid x \notin A\ \}$
Cartesisches Produkt von A und B	$A \times B := \{(x,y) \mid x \in A \text{ und } x \in B\ \}$ Die Elemente $(x,y) \in A \times B$ mit $x \in A$, $y \in B$ heißen *geordnete Paare*
Charakterisierende Eigenschaft der geordneten Paare:	$(a,b) = (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ und } b = d$ Also *komponentenweise Gleichheit* gefordert

<u>*Bemerkungen:*</u>

- Das in der Definition der *Vereinigung* auftretende (logische) *„oder“* ist ein *einschließendes „oder“*, umfaßt also auch das (logische) *„und“*.
- Zur Beschreibung der *Komplementärmenge* A' von A findet man teilweise auch die Schreibweisen A^c bzw. $\overline{A}$.
- Zwischen der Teilmengenbeziehung zweier Mengen A und B und der Teilmengenbeziehung ihrer *Komplementärmengen* A' und B' besteht folgender Zusammenhang:

  $$\boxed{(A \subseteq B) \quad \Leftrightarrow \quad (B' \subseteq A')}$$
- Man beachte, daß es sich bei den *geordneten Paaren* (a,b) mit $a \in A$, $b \in B$ um *Elemente* einer Menge (nämlich des Cartesischen Produkts von A und B) handelt, bei $\{a,b\}$ hingegen um eine *Menge*.
- Bei den *geordneten Paaren* kommt es auf die Reihenfolge der Komponenten an, nicht so bei den *Mengen*, d.h. es gilt:

  $\boxed{(a,b) \neq (b,a) \quad \text{für } a \neq b}$, aber stets $\boxed{\{a,b\} = \{b,a\}}$
- Man kann geordnete Paare auch als *Mengen* verstehen: $\boxed{(a,b) := \{\ \{\ a\ \}, \{\ a,b\ \}\ \}}$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Dann erfüllt (a,b) die charakteristische Paareigenschaft.
- In Verallgemeinerung zu den geordneten Paaren (a,b) mit $a \in A$, $b \in B$ lassen sich auch sogenannte *n-Tupel* mit n Komponenten einführen. Dabei gilt:

  $$\boxed{(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (b_1,b_2,\ldots,b_n) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1 \text{ und } a_2 = b_2 \text{ und } \ldots \text{ und } a_n = b_n}$$

  Auf diese Weise erhält man das verallgemeinerte *Cartesische Produkt* von n (nicht leeren) Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

  $$\boxed{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{\ (a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_1 \in A_1 \text{ und } a_2 \in A_2 \text{ und } \ldots \text{ und } a_n \in A_n\ \}}$$
- Ist $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ $(n \in \boldsymbol{N})$, so schreibt man abkürzend:

  $$\boxed{A^n := \underbrace{A \times A \times \ldots A}_{n-mal} = \{\ (a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_1, a_2,\ldots, a_n \in A\ \}}$$

- Im Fall $A = \boldsymbol{R}$ bietet das Cartesische Produkt die Möglichkeit zur Beschreibung von Punkten in der *Ebene* / dem *Raum* durch $P = (x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ bzw. $P = (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3$.

Für die *Mengenoperationen* „$\cap$“ , „$\cup$“ und *Komplementbildung* gelten - analog zu den Zahlen - bestimmte „Rechenregeln“, die in gewisser Weise an die Rechenregeln für Zahlen bezüglich der Operationen „+“ , „·“ und die Vorzeichenbildung „–“ erinnern. Zudem spielen die *leere* und die *Grundmenge* bzgl. der Mengenoperationen eine ähnliche Rolle wie *0* und *1* im Reich der Zahlen.

Gesetze der Mengenoperationen		
	Durchschnitt „$\cap$“	***Vereinigung „$\cup$“***
Assoziativgesetze	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Kommutativgesetze	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Distributivgesetze	$A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
Absorptionsgesetze	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Idempotenzgesetze	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Gesetz für das Komplement	$A \cap A' = \emptyset$	$A \cup A' = G$
Gesetz des doppelten Komplements	$(A')' = A$	
De Morgans Gesetze	$(A \cap B)' = A' \cup B'$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$
Operationen mit G und $\emptyset$	$G \cap A = A$ $\emptyset \cap A = \emptyset$	$\emptyset \cup A = A$ $G \cup A = G$
	$\emptyset' = G$, $G' = \emptyset$	

Man beachte:

Im Gegensatz zu den Rechengesetzen gilt in der Mengenalgebra ein strenges *Dualitätsprinzip*, wie der Vergleich zweier jeweils in einer Zeile stehenden Gesetze zeigt:

- *Vertauscht* man konsequent „$\cap$“ und „$\cup$“ sowie „$\emptyset$“ und „*G*“ in einem der Mengengesetze, erhält man das entsprechende dazu „duale“ Mengengesetz.