Differentialquotient und Ableitung

Die sogenannte „Differentialrechnung“ wurde fast zeitgleich vom englischen Mathematiker und Physiker *Isaac Newton* (*1642 - 1727*) sowie dem deutschen Mathematiker und Philosophen *Gottfried Wilhelm von Leibnitz* (*1646 - 1716*) entwickelt. Noch im 17. und 18. Jh. gab es unter den *Newtonianern* - wichtige Vertreter waren *Taylor*, *Stirling* und *McLaurin* - und den *Leibnitzianern* - darunter sind die Brüder *Bernoulli* sowie vor allem *Euler* zu nennen - einen erbitterten Streit um die eigentliche Urheberschaft der Differentialrechnung. Heute kann man sagen, dass mit größter Wahrscheinlichkeit *Newton* als erster das Differentialkalkül entwickelt hat und dass *Leibnitz* von Newtons Arbeit auf diesem Feld wusste. Andererseits verdanken wir Leibnitz die heute gebräuchliche Notation und geniale Methoden der Berechnung, wie z.B. die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel.

Wir führen nun zunächst den Begriff der *Ableitung* und der *Diffenzierbarkeit* ein, wobei wir Bezug auf den *geometrischen* Zugang nehmen.

Definition der Differenzierbarkeit	
Ableitung bzw. Differential-quotient	$f:]a,b[\to \mathbf{R}$ sei eine reelle Funktion und $x_0 \in]a,b[$. Man sagt *„ f ist an der Stelle x_0 differenzierbar“*, wenn der Grenzwert $$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ existiert. Für den *Differentialquotienten* bzw. die *Ableitung* $f'(x_0)$ der Funktion $y=f(x)$ an der Stelle x_0 schreibt man auch $$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right\|_{x=x_0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = Df(x_0)$$ und sagt dazu *„f-Strich von x_0“*, *„df nach dx für $x=x_0$“*, *„d nach dx von f an der Stelle $x=x_0$“*, *„Derivierte von f in x_0“*. Fasst man $y=f(t)$ als Funktion der Zeit t auf, so schreibt man auch wie Newton die Ableitung mit einem Punkt: $$\dot{f}(t_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}.$$
Ableitungsfunktion	Ist $f:]a,b[\to \mathbf{R}$ in jedem $x \in]a,b[$ differenzierbar, so sagt man: *„ f ist im Intervall $]a,b[$ differenzierbar“* und nennt die Funktion $f':]a,b[\to \mathbf{R}$ die (erste) *Ableitungs-*

	funktion oder kurz die *Ableitung von* f .
Lineare Approximation / Gleichung der Tangente	Sei $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ eine in $x_0 \in]a,b[$ differenzierbare Funktion. Dann ist die *Tangente* an den Graphen von f im Punkt $P(x_0,y_0)$ mit $y_0 = f(x_0)$ gegeben durch: $$t : y = g(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$ Setzt man $x = x_0 + h$, so erhält man: $$f(x_0+h) \approx g(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h \ .$$ Genauer: $$f(x_0+h) = g(x_0+h) + \varphi(h)\cdot h \quad \text{mit} \quad \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0 \ .$$ Man nennt $y = g(x)$ auch die *lineare Approximation* von f in x_0 . Insbesondere gilt: f ist in x_0 genau dann differenzierbar, wenn eine Zahl $a \in \mathbf{R}$ und eine Funktion $\varphi(h)$ existiert, so dass für alle $h \neq 0$ gilt: $$f(x_0+h) = f(x_0) + a\cdot h + \varphi(h)\cdot h \quad \text{mit} \quad \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0 \ .$$
Höhere Ableitungen	Ist $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ differenzierbar und die Ableitungsfunktion f' ebenfalls, dann sagen wir: *„f ist zweimal differenzierbar“* und schreiben: $$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} := (f')' = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) \ .$$ Setzt man diesen Prozess fort, so erhält man eine *n-mal differenzierbare Funktion*. Wir schreiben für die n-te Ableitung: $$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} := \left(f^{(n-1)}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) \ .$$ Gemäß Konvention ist dann $f^{(1)} = f'$ sowie $f^{(0)} = f$ für die Funktion selbst.

<u>Bemerkungen</u>*:*

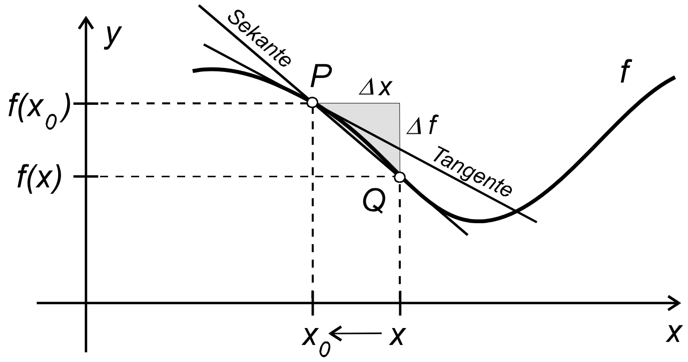
Den Ausdruck $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} := \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nennt man auch den *Differenzenquotienten*. Er beschreibt die Steigung der Geraden (*Sekante*), welche durch die beiden auf dem Graphen Γ_f von f gelegenen Punkte $P(x_0,y_0)$ mit $y_0 = f(x_0)$ und $Q(x,y)$ mit $y = f(x)$ geht.

Durch den Grenzübergang $x \to x_0$ erhält man den *Differentialquotienten* $\dfrac{df}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Dabei wird aus der *Sekante* – geometrisch betrachtet (siehe Skizze auf der nächsten Seite) – die *Tangente* an den Graphen Γ_f von f im Punkt P . Somit erhalten wir als eine *geometrische Interpretation* für die *Ableitung*:

$f'(x_0) = \tan\alpha$ gibt die *Steigung der Tangente* an den Graphen von f an der Stelle x_0 an.

Skizze:



- Den Prozess der Berechnung der Ableitung $f'(x_0)$ bzw. der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f nennt man auch *Differenzieren*, den Operator $D = \dfrac{d}{dx}$ nach Cauchy auch *Differentialoperator*.
- Der Differentialquotient findet vor allem in der Physik und Technik vielfältige Anwendungen und Deutungen. Insbesondere beschreibt er die *relative momentane Änderung* einer Größe. Beispiele sind dafür:

  – die *Momentangeschwindigkeit* $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$,

  – die *Momentanbeschleunigung* $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dot{v}(t) = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}(t)$,

  – die *elektrische Stromstärke* $i(t) = \dfrac{dq}{dt} = \dot{q}(t)$,

  – die *variable Dichte eines Stabes* $\rho_V = \dfrac{dm}{dV}$,

  – die *spezifische Wärme* $c(T) = \dfrac{dQ}{dT}$ usw.

Wir kommen nun zu einigen wichtigen *Ableitungsregeln*.

Ableitungsregeln	
Linearkombination von Funktionen (Summenregel):	Sind f und g in $x_0 \in \mathbf{R}$ differenzierbar und $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$, dann ist auch $h(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt: $h'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0)$.

(Leibnitzsche) Produktregel:	Sind f und g in $x_0 \in \mathbf{R}$ differenzierbar, dann ist auch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt: $$h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad .$$
Quotientenregel:	Sind f und g in $x_0 \in \mathbf{R}$ differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ in x_0 differenzierbar, und es gilt: $$h'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{\left[g(x_0) \right]^2} \quad .$$
Kettenregel:	Sei $g : D_g \to \mathbf{R}$ in $x_0 \in \mathbf{R}$ differenzierbar und $f : D_f \to \mathbf{R}$ mit $g(D_g) \subseteq D_f$ in $y_0 = g(x_0)$ differenzierbar, dann ist auch die *Verkettung* $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ in x_0 differenzierbar, und es gilt: $$h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \quad .$$ Verwendet man die Schreibweise $y = y(u)$ und $u = u(x)$, so erhält man in Leibnitzscher Schreibweise: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.
Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} :	Sei $f : D_f \to \mathbf{R}$ eine umkehrbare und in x_0 differenzierbare Funktion mit $f'(x_0) \neq 0$ und sei $f^{-1} : D_{f^{-1}} \to \mathbf{R}$ die inverse Funktion von f. Dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt: $$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} = \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(y_0)} \quad .$$ Verwendet man die Schreibweise $y = y(x)$ und $x = x(y)$, so erhält man in Leibnitzscher Schreibweise: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \cdot$.

<u>Bemerkungen</u>:

- Die Regel über die Ableitung einer *Linearkombination* lässt sich in folgender Weise verallgemeinern:

  Sind $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *differenzierbar und* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ *beliebige Konstanten, so ist die Funktion* $f(x) = \alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x) + \ldots + \alpha_n \cdot f_n(x)$ *differenzierbar, und es gilt:*

$$f'(x) = \alpha_1 \cdot f_1'(x) + \alpha_2 \cdot f_2'(x) + \ldots + \alpha_n \cdot f_n'(x) \quad .$$