$$g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}\,, \quad \boxed{g(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x}{3-x} & \text{für} \quad x \neq 3 \\ 1 & \text{für} \quad x = 3 \end{cases}}\;.$$

- Zur Beschreibung des Definitionsbereiches $D_f \subseteq \boldsymbol{R}$ einer reellen Funktion $f:\ D_f \to \boldsymbol{R}$ benutzt man gern die *Intervallschreibweise*. Dann erhält man alternativ für die Abbildung f von soeben folgende Abbildungsvorschrift:

$$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}\,, \quad \boxed{f(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{x} & , \quad x \in \left]0, \infty\right[\\ \dfrac{1}{2+x} & , \quad x \in [-1, 0] \\ -x & , \quad x \in \left]-\infty, -1\right[\end{cases}}\;.$$

Es folgt hier zur besseren Beschreibung des Definitions- und Wertebereichs reeller Funktionen einmal die generelle Definition der verschiedenen *Intervallschreibweisen*:

Intervalle in IR	
abgeschlossenes Intervall:	Sei $a, b \in \boldsymbol{R}$ mit $a \le b$. Dann gilt: $[a,b] := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x \le b\}$ $[a,\infty[= [a,\infty) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x\}$ $]-\infty,b] = (-\infty,b] := \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \le b\}$
offenes Intervall (*alternative Schreibweise):*	$]a,b[= (a,b) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}$ $]a,\infty[= (a,\infty) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x\}$ $]-\infty,b[= (-\infty,b) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < b\}$ Speziell erhält man noch: $\boldsymbol{R} =]-\infty,\infty[= (-\infty,\infty)$
halboffenes bzw. halbabgeschlossenes Intervall:	$[a,b[= [a,b) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x < b\}$ $]a,b] = (a,b] := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \le b\}$

Symmetrieeigenschaften reeller Funktionen

Wir untersuchen zunächst die Komposition einer reellen Funktion $f:\ D_f \to \boldsymbol{R}$ mit einer sogenannten *affin linearen* (siehe auch später) Funktion $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g(x) = a\,x + b$ mit gegebenen $a,b \in \boldsymbol{R}$. Spezialfälle einer affin linearen Funktion sind (i) für $a = 1, b = 0$ die *Identität* $g = id$ sowie (ii) für $a = 0$ die *konstante Funktion* $g(x) \equiv b$.

Geometrisch unterscheidet man insbesondere als „Bausteine" der affin linearen Funktion folgende drei Sonderfälle:

1) Die *Translation* $g(x) = x + b,\ x \in \boldsymbol{R}$ mit $a = 1$: Hier ergeben sich hinsichtlich der Komposition mit einer beliebigen anderen Funktion $f(x)$ folgende Kombinationen und Effekte:
   - $h = f \circ g$ mit $\boxed{h(x) = f(g(x)) = f(x + b)}$ beschreibt hinsichtlich des Ausgangsgraphen Γ_f von f eine *Verschiebung in x-Richtung* um den Wert $\Delta x = -b$.
   - $h = g \circ f$ mit $\boxed{h(x) = g(f(x)) = f(x) + b}$ beschreibt hinsichtlich des Ausgangsgraphen Γ_f von f eine *Verschiebung in y-Richtung* um den Wert $\Delta y = +b$.

2) Die *Dilatation* bzw. *Streckung* $g(x) = a\,x,\ x \in \boldsymbol{R}$ mit $a > 0$ und $b = 0$: Hinsichtlich der Komposition mit einer beliebigen anderen Funktion $f(x)$ ergeben sich dann folgende Kombinationen und Effekte:
   - $h = f \circ g$ mit $\boxed{h(x) = f(g(x)) = f(a\,x)}$ beschreibt hinsichtlich des Ausgangsgraphen Γ_f von f eine (orientierte) *Streckung in x-Richtung* um den Faktor $k = \dfrac{1}{a}$.
   - $h = g \circ f$ mit $\boxed{h(x) = g(f(x)) = a \cdot f(x)}$ beschreibt hinsichtlich des Ausgangsgraphen Γ_f von f eine (orientierte) *Streckung in y-Richtung* um den Wert $k = a$.

3) Die *Spiegelung* $g(x) = -x,\ x \in \boldsymbol{R}$ mit $a = -1$ und $b = 0$: Dabei ergeben sich durch die Komposition mit einer beliebigen anderen Funktion $f(x)$ folgende Kombinationen und Effekte:
   - $h = f \circ g$ mit $\boxed{h(x) = f(g(x)) = f(-x)}$ beschreibt hinsichtlich des Ausgangsgraphen Γ_f von f eine *Spiegelung an der y-Achse*,
   - $h = g \circ f$ mit $\boxed{h(x) = g(f(x)) = -f(x)}$ beschreibt hinsichtlich des Ausgangsgraphen Γ_f von f eine *Spiegelung an der x-Achse* sowie
   - $h = g \circ f \circ g$ mit $\boxed{h(x) = g(f(g(x))) = -f(-x)}$ beschreibt hinsichtlich des Ausgangsgraphen Γ_f von f eine kombinierte Achsenspiegelung und damit *Punktspiegelung am Koordinatenursprung*.

Aus der Untersuchung der Komposition einer (äußeren) Funktion $f: D_f \to \boldsymbol{R}$ mit der Verschiebung $g(x) = x + b$ bzw. der Spiegelung $g(x) = -x$ als innerer Funktion ergeben sich zwei weitere wichtige Eigenschaften reeller Funktionen, die sich geometrisch bezüglich der Graphen der Ausgangsfunktion und der Komposition, wie folgt, niederschlagen:

Weitere (geometrische) Eigenschaften:	
Periodizität:	Eine reelle Funktion $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ heißt *periodisch* mit der *Periode* $T > 0$, falls mit $g(x) = x + T$ gilt:

	$f(g(x)) = f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}$. Die kleinste Zahl $T > 0$ mit dieser Eigenschaft heißt auch *Grundperiode* der Funktion f .
Symmetrien:	Eine reelle Funktion $f: D_f \to \mathbf{R}$ mit $D_f = [-a,a] \subseteq \mathbf{R}$ bzw. $D_f =]-a,a[\subseteq \mathbf{R}$ ($a = +\infty$ zugelassen) heißt • *gerade*, falls gilt: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ bzw. • *ungerade*, falls gilt: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$.

<u>Bemerkungen</u>:

1. Eine *periodische* Funktion $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist also vollständig durch die Funktionsvorschrift auf dem (bezüglich $x_0 = 0$ symmetrischen) *Periodenintervall* $\left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ definiert.
2. Die Periodizität der reellen Funktion $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zur Periode $T > 0$ zeigt sich darin, dass der Graph $\Gamma_{f \circ g}$ der verketteten Funktion $(f \circ g)(x) = f(x+T)$ mit dem Ausgangsgraphen Γ_f der Funktion f deckungsgleich ist. D.h. eine Verschiebung des Graphen Γ_f der Funktion f um den Wert $\Delta x = -T$ in x-Richtung führt auf den alten Ausgangsgraphen.
3. Die Eigenschaft einer reellen Funktion, *gerade* bzw. *ungerade* zu sein, spiegelt sich in entsprechenden *Symmetrieeigenschaften* des Graphen Γ_f der Funktion f wider. Dabei gilt:
   - f ist eine *gerade* Funktion genau dann, wenn der Graph Γ_f *achsensymmetrisch* zur y-Achse ist.
   - f ist eine *ungerade* Funktion genau dann, wenn der Graph Γ_f *punktsymmetrisch* zum *Koordinatenursprung* ist. Ist insbesondere $x_0 = 0 \in D_f$, so gilt in diesem Fall zwangsläufig: $f(0) = 0$.
4. Eine beliebige reelle Funktion $f: D_f \to \mathbf{R}$ mit symmetrischem Definitionsbereich D_f lässt sich stets in einen *geraden* Funktionsanteil $g(x)$ und einen *ungeraden* Funktionsanteil $u(x)$ zerlegen mittels

   $$\boxed{g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}} \quad \text{sowie} \quad \boxed{u(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}} .$$

   Denn es gilt für alle $x \in D_f$: $g(-x) = g(x)$, $u(-x) = -u(x)$ sowie $g(x) + u(x) = f(x)$.
5. Weiterhin lässt sich zu einer gegebenen reellen Funktion $f: D_f \to \mathbf{R}$ mit $D_f = [0,a]$ bzw. $D_f =]0,a[$ die *gerade Fortsetzung* $\tilde{f}_g : D_{\tilde{f}} \to \mathbf{R}$ sowie die *ungerade Fortsetzung* $\tilde{f}_u : D_{\tilde{f}} \to \mathbf{R}$ mit $D_{\tilde{f}} = [-a,a]$ bzw. $D_{\tilde{f}} =]-a,0[\cup]0,a[$ bilden mittels der Definition

$\boxed{\tilde{f}_g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}}$ bzw. $\boxed{\tilde{f}_u(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -f(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}}$.

Übersicht über die reellen Elementarfunktionen

Man unterscheidet in Bezug auf die elementaren Bausteinfunktionen im Wesentlichen die folgenden Klassen, denen die Funktionen und ihre zugehörigen Umkehrfunktionen zugeordnet sind:

- *Polynome* $\boxed{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$ und *rationale Funktionen* $\boxed{f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}}$ mit Polynomen $p(x)$ und $q(x)$.

  Unter den Polynomen bilden wiederum die *Monome* $\boxed{f(x) = x^n}$ ($n \in \mathbf{N}_0$) quasi die Bausteine. Insbesondere kann man Polynome allgemein als (endliche) *Linearkombinationen* von Monomen bezeichnen bzw. verstehen.

  Die *Umkehrfunktionen* der Monome sind die *Wurzelfunktionen* $\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}}$.

- *Potenzfunktionen* $\boxed{f(x) = a^x}$ mit Basis $a > 0$ ($a \in \mathbf{R}$) . Der wichtigste Vertreter dieser Klasse ist die *Exponentialfunktion* $\boxed{f(x) = e^x}$ mit der *Eulerschen Zahl* $e = 2{,}71\ldots$

  Die *Umkehrfunktionen* der Potenzfunktionen sind die *Logarithmusfunktionen* $\boxed{f(x) = \log_a(x)}$ und der wichtigste Vertreter unter ihnen der *natürliche Logarithmus* $\boxed{f(x) = \ln(x) = \log_e(x)}$ als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

- *Trigonometrische* (d.h. *Dreiecks*-) bzw. *Kreisfunktionen* $\boxed{f(x) = \sin(x)}$, $\boxed{f(x) = \cos(x)}$, $\boxed{f(x) = \tan(x)}$, $\boxed{f(x) = \cot(x)}$. Insbesondere gilt: $\boxed{f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$, $\boxed{f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}}$.

  Die zugehörigen *Umkehrfunktionen* sind die sogenannten *Arcusfunktionen:*

  $\boxed{f(x) = \arcsin(x) = \sin^{-1}(x)}$, $\boxed{f(x) = \arccos(x) = \cos^{-1}(x)}$, $\boxed{f(x) = \arctan(x) = \tan^{-1}(x)}$ sowie $\boxed{f(x) = \operatorname{arc\,cot}(x) = \cot^{-1}(x)}$.