Anwendungen der Exponential- und Logarithmusfunktion

Viele Vorgänge in der Natur sowie anderen Bereichen (z.B. in der Geldwirtschaft) lassen sich unter Anwendung der Potenz zur *Eulerschen* Basis e - man spricht in diesem Fall von der *Exponentialfunktion* $f(x) = exp\,(x) := e^x$ - sowie ihrer Umkehroperation - das ist die natürliche *Logarithmusfunktion* $f^{-1}(x) = ln\,(x) := log_e\, x$ - beschreiben. Derartige Vorgänge, die mittels der Exponentialfunktion beschreibbar sind, sind z.B.

(i) das *Wachstum einer Population*,
(ii) die *Kapitalvermehrung bei Zinseszins*,
(iii) die *Erwärmung* bzw. *Abkühlung* eines Objektes in einer gleichmäßig temperierten Umgebung oder auch
(iv) der *radioaktive Zerfall* einer chemischen Substanz.

Zur Beschreibung dieser zeitlich abhängigen Vorgänge

- verwendet man einerseits die *Variable* t für die Zeit ($t = time$),
- andererseits bezeichnet man mit $N(t)$ o.ä. die untersuchte Quantität (z.B. Stoffmenge, Kapital, Temperatur usw.) zum Zeitpunkt $t > 0$.

Insbesondere stellt damit $N(t)$ eine *Funktion* der Zeit t dar. Dabei versteht man unter einer Funktion $f : A \to B$ allgemein eine *Abbildungsvorschrift* – häufig in Form einer Gleichung $y = f(x)$ vorgegeben –, durch welche jedem $x \in A$ in eindeutiger Weise ein $y \in B$ zugeordnet wird.

Bezeichnet weiterhin $N_0 = N(0)$ die *Ausgangsquantität* der betrachteten Größe zum Zeitpunkt $t = 0$, so erhält man unter Verwendung der sogenannten *Wachstumskonstanten* $a > 0$ bzw. $\lambda \in \mathbf{R}$ das folgende zugehörige allgemeine (Wachstums-)Gesetz:

$$(*) \qquad \boxed{N(t) = N_0 \cdot a^t}\ , t \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}}\ , t \geq 0\ .$$

Benutzt man die Identität $\boxed{a = e^{ln\, a}}$ für die linke Gleichung, so liefert ein Vergleich der beiden Darstellungen: $\boxed{\lambda = ln\, a}$. Somit ergeben sich folgende drei Fälle für das Verhalten von $N(t)$:

(i) $a = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0$: Es ist $N(t) \equiv N_0$; d.h. $N(t)$ ist zeitlich konstant.
(ii) $a > 1 \Leftrightarrow \lambda > 0$: Es liegt *Wachstum* vor ($a^t > 1$ für alle $t > 0$).
(iii) $a < 1 \Leftrightarrow \lambda < 0$: Es liegt *Abnahme* bzw. *Verminderung* vor ($a^t < 1$ für alle $t > 0$).

Im Fall eines *abnehmenden* $N(t)$ schreibt man oft auch $\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$ ($t \geq 0$) mit einem $\lambda > 0.$ Hier interessiert vor allem der Zeitpunkt $\tau > 0$, an welchem die Ausgangsquantität N_0 sich auf die Hälfte verringert hat. Für diese sogenannte *Halbwertszeit* gilt dann:

$$\boxed{N(\tau) = \frac{N_0}{2}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\tau = \frac{ln\, 2}{\lambda}}\ .$$

Geraden und Parabeln

Ausgehend von der allgemeinen *Polynomfunktion,* die gegeben ist durch die Funktionsgleichung $p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ mit reellen *Koeffizienten* $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{R}$, betrachten wir im Folgenden zwei wichtige Spezialfälle, nämlich die *affin lineare* sowie die *quadratische Funktion*. Dabei handelt es sich bei dem (sogenannten) *Graphen* einer affin linearen Funktion um eine *Gerade* und bei dem einer quadratischen Funktion um eine *Parabel*, deren Symmetrieachse parallel zur *y*-Achse liegt.

Die Geradengleichung	
Allgemeine Form der Geradengleichung:	$g:\quad ax + by + c = 0$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ mit $(a,b) \neq (0,0)$
Normalform der Gleichung (*affin lineare* Funktion):	$y = f(x) = a \cdot x + b$, $x \in \mathbf{R}$. Dabei bezeichnet a : die Geradensteigung, b : den *y*-Achsenabschnitt
Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung im Rellen: Gerade durch $P = (x_0, y_0)$ mit Steigung a	$g:\quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ oder als Funktion: $y = f(x) = a \cdot (x - x_0) + y_0$, $x \in \mathbf{R}$.
Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung im Reellen: Gerade durch die zwei Punkte $P(x_1,y_1)$ und $P(x_2,y_2)$	$g:\quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ oder als Funktion: $y = f(x) = a \cdot (x - x_1) + y_1$, $x \in \mathbf{R}$ mit $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
Die Parabelgleichung	
Allgemeine Form (*Normalform*) der *Parabelgleichung* (*quadratische Funktion*):	$y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbf{R}$ mit $a,b,c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Spezialfall ($a = 1$, $b = c = 0$): $y = f(x) = x^2$ als *Normalparabel*. Der Parameter a beschreibt die Richtung und den Grad der *Öffnung* der Parabel ($a > 0$: Öffnung nach *oben*, $a < 0$: Öffnung nach *unten*). Der Punkt $S(x_0, y_0)$ mit $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{\Delta}{4a}$ und der *Diskriminante* $\Delta = b^2 - 4 \cdot ac$ heißt der *Scheitelpunkt* der Parabel und stellt ihren niedrigsten ($a > 0$) bzw. den höchsten Punkt ($a < 0$) dar.

Scheitel(*punkt*)*gleichung* der *Parabel*:	$y = f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$, $x \in \boldsymbol{R}$ mit $a \neq 0$; *Symmetrieachse:* $x = x_0$, *Scheitelpunkt:* $S\,(x_0 , y_0)$. Speziell ist $y_0 = f(x_0)$.
faktorisierte Form der quadratischen Funktion (= Zerlegung in *Linearfaktoren*):	$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, $x \in \boldsymbol{R}$. $x_1 \in \boldsymbol{C}$ *und* $x_2 \in \boldsymbol{C}$ sind die *reellen* bzw. *komplexen Nullstellen* des quadratischen Polynoms (siehe weiter unten).

<u>*Bemerkungen*</u>:

- Die Umwandlung der allgemeinen quadratischen Funktion in die Scheitelpunktgleichung erfolgt am sinnvollsten mittels der *quadratischen Ergänzung*. Das Verfahren ist im konkreten Fall der sturen Formel vorzuziehen.
- Die *faktorisierte* Form der quadratischen Funktion ist insbesondere sehr vorteilhaft, weil sie die *Nullstellen* der Funktion sichtbar macht. Speziell bei der Betrachtung von *rationalen Funktionen* in der Umgebung einer Nullstelle des Nennerpolynoms kann es vorkommen, dass der kritische lineare Term mit der betrachteten Nullstelle auch im Zählerpolynom auftritt, so dass ein Kürzen möglich wird und der kritische Term des Nenners sich auf diese Weise quasi „in Luft auflöst".
- Die *Nullstellen* der quadratischen Funktion $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ergeben sich als Lösungen der *quadratischen Gleichung* $y = f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, die im Folgenden beschrieben werden:

Allgemeine Form der reellen quadratischen Gleichung:	$ax^2 + bx + c = 0$ mit $a,b,c \in \boldsymbol{R}$ ($x \in \boldsymbol{R}$ bzw. $x \in \boldsymbol{C}$)
Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$:	Bezeichne $\Delta := b^2 - 4ac$ die sogenannte *Diskriminante* der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Dann gilt: (i) *Fall* $\Delta > 0$: Die reelle quadratische Gleichung hat *zwei verschiedene reelle Lösungen*, nämlich $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ (ii) *Fall* $\Delta = 0$: Die reelle quadratische Gleichung hat *eine doppelte reelle Lösung*, nämlich $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ (iii) *Fall* $\Delta < 0$: Die reelle quadratische Gleichung hat dann *keine reelle Lösung*.

	Führt man aber als „neue Zahl“ und Lösung der quadratischen Gleichung $x^2+1=0$ die *imaginäre Einheit* $i := \sqrt{-1}$ ein, dann erhält man folgende *zwei* (*verschiedene*) *komplexe Lösungen*: $$x_1 = \frac{-b + i\cdot\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \frac{-b}{2a} + i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$ sowie $$x_2 = \frac{-b - i\cdot\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \frac{-b}{2a} - i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\ .$$ Dabei gilt: $i^2=-1$.
Probe für die beiden Lösungen x_1 und x_2 (*Satz von Vieta*):	Sowohl im *reellen* als auch im *komplexen* Fall – hierbei beachte man $i^2=-1$ – gilt: (i) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ sowie (ii) $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. Daraus folgt: $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

<u>*Bemerkung:*</u>

- Schreibt man die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ um in die Form $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+px+q=0$ mit $p=\frac{b}{a}$ und $q=\frac{c}{a}$, so erhält man für die Nullstellen der quadratischen Gleichung die berühmte *pq-Formel*: $\boxed{x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}$.
- Historisch ist die Forderung nach der Existenz Lösung der Gleichung $\boxed{x^2+1=0}$ und damit einer Wurzel aus einer *negativen* Zahl die Geburtsstunde der *imaginären Einheit „i“* als Lösung dieser Gleichung. Also besitzt diese neue „Zahl“ die sie charakterisierende Eigenschaft $i^2+1=0 \Leftrightarrow i^2=-1$.

  Mithilfe von i wird allgemeiner die Menge $\boldsymbol{C}$ der *komplexen* (von lat. *complex* = dt. *zusammengesetzt*) *Zahlen* eingeführt:

  $\boxed{\boldsymbol{C}=\left\{z=x+i\,y \,\middle|\, x,y\in\boldsymbol{R}\right\}}$.
- Definiert man zu $z=x+i\,y\in\boldsymbol{C}$ noch zusätzlich die sogenannte *komplex konjugierte* Zahl $\boxed{\bar{z}=x-i\,y\in\boldsymbol{C}}$, so besteht im Fall der negativen Diskriminante $\Delta:=b^2-4ac<0$ zwischen den beiden *komplexen* Lösungen $z_1,z_2\in\boldsymbol{C}$ der quadratischen Gleichung folgender Zusammenhang: $z_2=\bar{z}_1$. Das Lösungspaar ist also zueinander *komplex konjugiert*.