Ziel:	Suche für $f(x)$ eine Darstellung der Form: $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=s(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$ mit $s(x)=c_s\cdot x^s+\ldots+c_1\cdot x+c_0$ und $r(x)=d_r\cdot x^r+\ldots+d_1\cdot x+d_0$, wobei gilt: $s=m-n$, $r<n$. Es folgt dann: $p(x)=s(x)\cdot q(x)+r(x)$.
Algorithmus zur Berechnung von $s(x)$ und $r(x)$:	1. Teile die höchsten Terme von $p(x)$ und $q(x)$ durcheinander. Dann erhält man: $\frac{a_m\cdot x^m}{b_n\cdot x^n}=c_s\cdot x^{m-n}=c_s\cdot x^s$ mit $c_s=\frac{a_m}{b_n}$. 2. Bilde das Differenzpolynom $p_1(x)=p(x)-c_s\cdot x^{m-n}\cdot q(x)=\tilde{a}_t\cdot x^t+\ldots+\tilde{a}_0$. 3. Ist jetzt $t\geq n$, dann verfahre weiter mit den Schritten (1) und (2): Bilde also $\frac{\tilde{a}_t\cdot x^t}{b_n\cdot x^n}=c_{s-\lambda}\cdot x^{t-n}$ sowie weiter $p_2(x)=p_1(x)-c_{s-\lambda}\cdot x^{t-n}\cdot q(x)=\hat{a}_\mu\cdot x^\mu+\ldots+\hat{a}_0$. 4. Am Ende erhält man das gesuchte Polynom $s(x)$ in der Form $s(x)=c_s\cdot x^{m,-n}+c_{s-\lambda}\cdot x^{t-n}+\ldots$ und $r(x)$ als das erste Differenzpolynom $r(x)=p_k(x)$ mit $\mu=grad\ r<n$.

<u>Bemerkung</u>:

Häufig findet die *Polynomdivision* eines Polynoms $p(x)$ durch einen *linearen Term* der Form $q(x)=x-x_0$ mit $x_0\in\boldsymbol{R}$ besondere Anwendung. In diesem Spezialfall ist wieder einmal das *Hornerschema* extrem hilfreich, denn sein Algorithmus zur Berechnung des Funktionswertes $p(x_0)$ eines Polynoms an der vorgegebenen Stelle $x_0\in\boldsymbol{R}$ liefert die Polynomdivision durch den Term $q(x)=x-x_0$ gleich automatisch mit:

Betrachtet man die Zahlen c_m bis c_0 in der letzten Zeile im Hornerschema (s. S.4) mit dem Wert x_0, so stellen sie gerade die *Koeffizienten* der Polynome $q(x)$ und $r(x)$ in der Polynomdivision mit Rest von $p(x):(x-x_0)$ dar. Genauer gilt:

$p(x)=(x-x_0)\cdot q(x)+r(x)$ mit $q(x)=c_m\cdot x^{m-1}+c_{m-1}\cdot x^{m-2}+\ldots+c_2\cdot x+c_1$ sowie $r(x)\equiv c_0$. Ist speziell x_0 eine *Nullstelle* von $p(x)$, so erhält man: $r(x)\equiv 0$.

Die Potenzgesetze

Wir behandeln in Erinnerung an die Schulmathematik im Folgenden die Potenzrechnung, und zwar zunächst für reelle Basen $a\in\boldsymbol{R}$, $a\neq 0$ mit natürlichem (bzw. ganzzahligem) Exponenten $n\in\boldsymbol{N}$ (bzw. $n\in\boldsymbol{Z}$):

	Für $a\in\boldsymbol{R}$ und $n\in\boldsymbol{N}$ ist die *Potenz* a^n definiert durch:

*Definition der **Potenz** als Produkt:*	$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal}$ mit $a^0 := 1$. Für $a \neq 0$ und $n \in \boldsymbol{N}$ definiert man zusätzlich: $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$. Damit ist a^n nun auch für beliebige ganzzahlige Exponenten $n \in \boldsymbol{Z}$ definiert
rekursive Definition der Potenz:	$a^0 := 1$, $a^{n+1} := a \cdot a^n$ $(a \in \boldsymbol{R}\ , n \in \boldsymbol{N})$
Rechenregeln der Potenz (Potenzgesetze):	(1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$, (2) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ für $b \neq 0$, (3) $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m}$.

<u>Bemerkungen:</u>

- Im Ausdruck $\boxed{a^n = b}$ heißt $a \in \boldsymbol{R}$ die *Basis*, $n \in \boldsymbol{Z}$ der *Exponent* und $b \in \boldsymbol{R}$ der *Potenzwert*. (Man beachte: Für *negative* Exponenten $n < 0$ wird $a \neq 0$ gefordert.)
- Das *Potenzieren* mit natürlichem Exponenten ist quasi eine „Abkürzung“ für die *n*-malige Multiplikation ein- und desselben Faktors a , der Basis der Potenz. Analog ist ja auch die Multiplikation $x = n \cdot a$ einer reellen Zahl $a \in \boldsymbol{R}$ mit der natürlichen Zahl $n \in \boldsymbol{N}$ nichts anderes als eine „Abkürzung“ für die *n*-malige Addition dieser Zahl.
- In der Verallgemeinerung der Potenzen werden wir als nächstes auch *rationale* und *irrationale* Exponenten zulassen. Dazu benötigen wir zumindest für den Fall eines *rationalen* Exponenten die n-te *Wurzel* aus einer positiven reellen Zahl. Allerdings dürfen für die verallgemeinerte Potenz nur noch Basen $a \in \boldsymbol{R}$ mit $a > 0$ zugelassen werden.

Wurzeln und allgemeine reelle Potenzen

Wir lernen das Wurzelziehen – oder *Radizieren* auf „gut mathematisch“ – als eine sogenannte *Umkehroperation* zum Potenzieren mir natürlichem Exponenten kennen.

*Definition der reellen **n-ten Wurzel:***	Für $a \in \boldsymbol{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \boldsymbol{N}$ definiert man die *n-te Wurzel* $\sqrt[n]{a}$ als die eindeutige Zahl $x \in \boldsymbol{R}$, $x \geq 0$ mit $x^n = a$. Speziell definiert man: $\sqrt[n]{0} = 0$ und schreibt gemäß Konvention für $n = 2$ (*Quadratwurzel*) nur: $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.
*Definition von **Potenzen mit rationalen Exponenten** für reelle Basen:*	Für $a \in \boldsymbol{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{N_0}$ definiert *man:* $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$ bzw. $a^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

	Für $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$ und $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $m < 0$ definiert *man:* $$a^{\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}} \quad .$$
*Rechenregeln der reellen Wurzel (**Wurzelgesetze**):*	(1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ für $b > 0$, (2) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$, (3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.

<u>*Bemerkungen:*</u>

- Für die *n*-te Wurzel x aus einer positiven reellen Zahl $a \in \boldsymbol{R}$ gilt also:
  $$\boxed{x = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a} \; .$$
  Damit ist das *Radizieren* – oder auf gut Deutsch: das *Wurzelziehen* – eine *Umkehroperation* zum Potenzieren und verhält sich zum Potenzieren wie die Subtraktion zur Addition bzw. wie die Division zur Multiplikation.
- Im Ausdruck $\boxed{\sqrt[n]{a} = b}$ heißt $a \in \boldsymbol{R}$, $a \geq 0$ der *Radikand*, $n \in \boldsymbol{N}$ der *Wurzelexponent* und $b \in \boldsymbol{R}$ der *Wurzelwert* bzw. die *Wurzel*.
- Für die soeben eingeführten Potenzen $a^{\frac{m}{n}}$ mit rationalen Exponenten $\alpha = \frac{m}{n} \in \boldsymbol{Q}$ und positiver Basis $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$ gelten uneingeschränkt die bekannten *Potenzgesetze*. Aus dieser Sicht stellen die Wurzelgesetze (1) bis (3) nur spezielle Anwendungen der Potenzgesetze dar bzw. lassen sich durch Anwendung derselben beweisen.
- In Brüchen, deren *Nenner* die Form $N = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ bzw. $N = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ mit $a > 0, b > 0$, $a \neq b$ hat, macht man sinnvoll von der 3. Binomischen Formel Gebrauch, d.h. man erweitert den Nenner entsprechend mit dem Ausdruck $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ bzw. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Auf diese Weise „verschwinden“ die Quadratwurzeln aus dem Nenner.
- Man kann die Potenz a^{α} mit positiver Basis $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$ auch für beliebige *irrationale* Exponenten $\alpha \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ definieren. Dazu betrachtet man die *rationale* „Folge“ der endlichen *Dezimalbrüche* $x_n = c{,}b_1 b_2 \ldots b_n = c + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} + \ldots + \frac{b_n}{10^n} \in \boldsymbol{Q}$, welche α approximieren, und definiert a^{α} als *Grenzwert von* a^{x_n} . Die bekannten *Potenzgesetze* übertragen sich dann auf beliebige *reelle* Exponenten $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.
- Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen der Quadratwurzel und dem *Betrag* $|a|$ einer reellen Zahl $a \in \boldsymbol{R}$, der definiert ist als die *vorzeichenlose Zahl* - also mittels
  $$\boxed{|a| := \begin{cases} a \text{ , falls } a \geq 0 \\ -a \text{ , falls } a < 0 \end{cases}}$$
  . Der Zusammenhang ist gegeben durch: $\boxed{|a| = \sqrt{a^2}}$, wodurch unmittelbar klar ist, dass gilt: $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Der Logarithmus zu einer beliebigen Basis

Mit dem *Logarithmieren* lernen wir eine weitere *Umkehroperation* zum Potenzieren kennen.

Definition des ***Logarithmus:***	Seien $a,b \in \boldsymbol{R}$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$. Dann ist der *Logarithmus* $\log_b a$ von a zur Basis b als die eindeutige Zahl $x \in \boldsymbol{R}$ definiert mit: $b^x = a$. Speziell gilt: $\log_b x = u \quad \Leftrightarrow \quad b^u = x$.
Spezielle ***Logarithmenwerte****:*	Für $a,b \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ gilt stets: (i) $b^{\log_b a} = a$, (ii) $\log_b 1 = 0$ sowie (iii) $\log_b b = 1$.
Rechenregeln für den Logarithmus:	Sei im folgenden $b > 0$, $b \neq 1$. Dann gilt für beliebige Zahlen $a,x,y \in \boldsymbol{R}$ mit $x > 0$, $y > 0$ sowie für $n \in \boldsymbol{N}$: (1) $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$, (2) $\log_b \left(\frac{x}{y} \right) = \log_b x - \log_b y$, (3) $\log_b x^a = a \cdot \log_b x$, speziell: $\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_b x$.
Umrechnung zwischen ***Logarithmen*** *verschiedener Basen:*	Für $a,b,c \in \boldsymbol{R}$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$ gilt stets: $\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$ bzw. $\log_c a = \log_c b \cdot \log_b a$.

<u>*Bemerkungen:*</u>

- Im Ausdruck $\boxed{c = \log_b a}$ heißt $b \in \boldsymbol{R}$ die *Basis* und $a \in \boldsymbol{R}$ der *Numerus* des Logarithmus c . Man beachte, dass stets a und b *positiv* gewählt werden müssen mit $b \neq 1$.
- Wählt man als Basis $b = 10$, so erhält man den *dekadischen Logarithmus*. In Zeichen: $\boxed{\lg a := \log_{10} a}$ für $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$.
- Wählt man als Basis $b = e$ mit der Eulerschen Zahl $e = 2{,}71828\ldots \in \boldsymbol{R}$, so erhält man den *natürlichen Logarithmus*. In Zeichen: $\boxed{\ln a := \log_e a}$ für $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$.
- Bezüglich der Umrechnungsformeln zwischen dekadischem und natürlichem Logarithmus gilt für $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$ beliebig:

  (i) $\lg a = \lg e \cdot \ln a \approx 0{,}43429 \cdot \ln a$ bzw. (ii) $\ln a = \ln 10 \cdot \lg a \approx 2{,}30259 \cdot \lg a$.
- Bei allgemeinen Rechenregeln für den Logarithmus, die für alle Basen $b > 0$, $b \neq 1$ gelten, lässt man die Angabe von b oft weg. Man schreibt hier also: $\boxed{c = \log a}$.