Technische Universität Berlin
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

SS 2013
29.06.2013

Studienrat im Hochschuldienst
Albrecht Gündel-vom Hofe

Beiblatt zur Semesterklausur in „Elementargeometrie“: *Die Axiome I bis IX zur Geometrie der Ebene*

Axiom I : (*1. Verknüpfungsaxiom*)

Jeder Geraden $g \in \boldsymbol{G}$ gehören mindestens zwei (voneinander verschiedene) Punkte $P,Q \in \boldsymbol{E}$ an.

Axiom II : (*2. Verknüpfungsaxiom*)

Durch je zwei (voneinander verschiedene) Punkte $P,Q \in \boldsymbol{E}$ geht *genau* eine Gerade $g \in \boldsymbol{G}$.

Axiom III : (*3. Verknüpfungsaxiom*)

Es gibt (mind.) drei nicht auf ein- und derselben Geraden gelegene (d.h. *nicht kollineare*) Punkte $P,Q,R \in \boldsymbol{E}$.

Axiom IV : (*Anordnungsaxiom*)

Auf jeder Geraden $g \in \boldsymbol{G}$ existiert eine streng lineare Ordnungsrelation $\prec_g$;
d.h. $\prec_g$ erfüllt folgende Bedingungen:

(1) Für alle Punkte $P,Q \in g$ gilt entweder $P \prec_g Q$ oder $Q \prec_g P$ oder $P = Q$.

(2) Für alle Punkte $P,Q,R \in g$ gilt: $P \prec_g Q \wedge Q \prec_g R \rightarrow P \prec_g R$

Axiom V : (*Streckenmaßaxiom*)

Es gibt eine Funktion $d : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{R}_0^+$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle Punkte $P,Q \in g$ gilt: $d(P,Q) = d(Q,P)$ (*Symmetrie*)

(2) Für alle Punkte $P,Q,R \in g$ mit $R \in \overline{PQ}$ gilt: $d(P,Q) = d(P,R) + d(R,Q)$ (*Additivität*)

(3) Auf jedem Strahl $^{\mathsf{I}}\overline{PQ} \subset \boldsymbol{E}$ und zu jeder Zahl $a \in \boldsymbol{R}_0^+$ existiert *genau ein* Punkt $R \in \boldsymbol{E}$ mit $R \in {}^{\mathsf{I}}\overline{PQ}$ und $d(P,R) = a$ (*eindeutige Abtragbarkeit*)

Axiom VI : (*Halbebenenaxiom*)

Zu jeder Geraden $g \in \boldsymbol{G}$ gibt es *genau zwei* nicht leere Untermengen (*Halbebenen*) $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2 \subset \boldsymbol{E}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) H_1 und H_2 sind konvex,

(2) $\mathrm{H}_1 \cup \mathrm{H}_2 = \boldsymbol{E} \setminus g$ und $\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2 = \varnothing$,

(3) Für alle Punkte $P \in \mathrm{H}_1$ und $Q \in \mathrm{H}_2$ gilt: $\overline{PQ} \cap g \neq \varnothing$.

bitte wenden!!

Axiom VII : (*Winkelmaßaxiom*)

Zu $\Omega := \{W \mid W$ ist *Winkelfeld* in $\boldsymbol{E}\}$ gibt es eine Funktion $\omega : \Omega \to [0, 180]$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Ist $W = W_1 \cup W_2$ eine Zerlegung von W, so gilt: $\omega(W) = \omega(W_1) + \omega(W_2)$ (*Additivität*)

(2) Zu jeder Halbgeraden h_1 auf einer Trägergeraden h mit zugehöriger abgeschlossener Halbebene $\overline{H}_h$ und zu jeder Zahl $\alpha \in [0, 180]$ gibt es genau ein Winkelfeld $W \in \Omega$ mit Schenkel h_1, $W \subset \overline{H}_h$ und $\omega(W) = \alpha$ (*eindeutige Abtragbarkeit des Winkelfeldes*).

Axiom VIII : (*Spiegelungsaxiom*)

Zu jeder Geraden $g \in \boldsymbol{G}$ gibt es *genau eine* Achsenspiegelung $\gamma_g : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ mit g als Achse.

Axiom IX : (*Streckungsaxiom*)

Jede Streckung $\sigma : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ ist eine Ähnlichkeitsabbildung.