Zur Übersicht über Kapitel 2:

// Definition 2.1

konvexe Menge

→ Ebene $\mathcal{E}$
→ Geraden $g \in \mathcal{G}$
→ $\emptyset$
→ Halbgeraden $\overrightarrow{PQ}$
→ Strecken $\overline{PQ}$ (auch für $P=Q$!)

⇓

Halbebenenaxiom (VI)

Begriffe: offene / abgeschl. Halbebene, Rand einer HE.

Satz 2.3 → Lage von Parallelen in Halbebenen

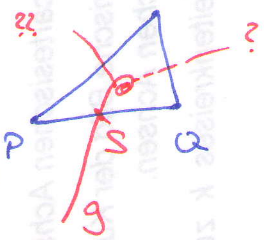
$\mathcal{E} = \mathcal{H} \cup \mathcal{H}' \cup h$, $h \cap h' = \emptyset$, $\Rightarrow h' \subset \mathcal{H} \vee h' \subset \mathcal{H}'$

Satz 2.4 → Eindeutigkeit der Randgeraden zu gegebener Halbebene

$\mathcal{H}$ HE zu h und h^* $\Rightarrow h = h^*$

Satz 2.5 → Pasch!!

logische Äquivalenz

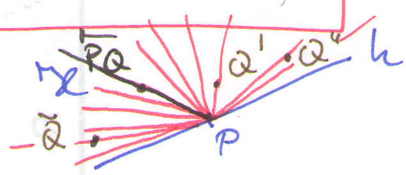


Satz 2.6: Schnitt abgeschl. HE mit Gerade: $\overline{\mathcal{H}} \cap g = \overrightarrow{PQ}$

⇓

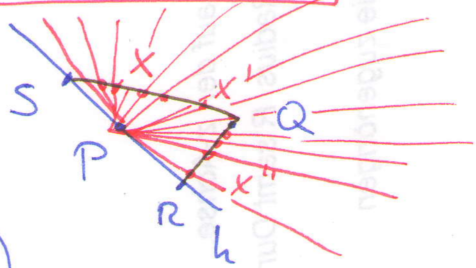
Darstellungssätze für Halbebenen mittels Strahlen

Satz 2.7: $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup h = \bigcup_{Q \in \mathcal{H} \cup h \setminus \{P\}} \overrightarrow{PQ}$



mittels Pasch!! - - →

Satz 2.8: $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup h = \bigcup_{X \in \overline{RQ} \cup \overline{QS}} \overrightarrow{PX}$



⟹ **Schnitt von Halbebenen = Winkelfelder!!**

// Definition 2.2

|| Definition 2.2

Definition Winkelfeld

→ Nullwinkelfeld = Halbgerade $\overline{PQ}$

→ echtes Winkelfeld

→ gestrecktes Winkelfeld = abgeschl. Halbebene $\overline{\mathcal{H}_h}$

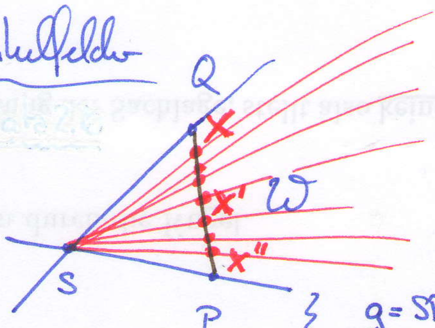
Begriffe: Scheitel, Schenkel, $\mathcal{W} = \sphericalangle g_1 h_1 = \sphericalangle PSQ$

Satz 2.9 → Winkelfelder als spezielle konvexe Mengen

Satz 2.10 ↓

|| Darstellungssatz für echte Winkelfelder mittels Strahlen:

$$\mathcal{W} = \sphericalangle PSQ = \bigcup_{X \in \overline{PQ}} \overline{SX}$$



$g = SP$, $h = SQ$,
$\mathcal{H}_g = \mathcal{H}_Q$ mit $Q \in \mathcal{H}_Q$,
$\mathcal{H}_h = \mathcal{H}_P$ mit $P \in \mathcal{H}_P$
$\Rightarrow \mathcal{W} = \overline{\mathcal{H}_g} \cap \overline{\mathcal{H}_h} = \overline{\mathcal{H}_P} \cap \overline{\mathcal{H}_Q}$!!

Hilfssatz: $\mathcal{W} = \sphericalangle PSQ$, $g = PQ$
$\Rightarrow \mathcal{W} \cap g = \overline{PQ}$

|| Definition 2.3

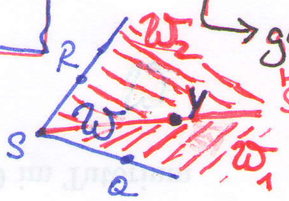
Definition: Zerlegung von Winkelfeldern

→ Spezialfall: triviale Zerlegung mittels Nullwinkelfeld

Satz 2.11: Existenz beliebiger Zerlegungen:
Jede Halbgerade $\overline{SY}$ mit $Y \in \mathcal{W} = \sphericalangle QSR$ zerlegt $\mathcal{W}$ in 2 Teilwinkelfelder!!

$\Rightarrow \mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ mit $\mathcal{W}_1 = \sphericalangle QSY$, $\mathcal{W}_2 = \sphericalangle YSR$!!

⇒ Spezialfälle: Nullwinkelfeld, gestrecktes WF!!



Winkelmaßaxiom (VI1)

Satz 2.12: $\omega(\mathcal{W}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{W}$ Nullwinkelfeld

Satz 2.13: $\mathcal{W}$ echtes WF $\Leftrightarrow 0 < \omega(\mathcal{W}) < 180$

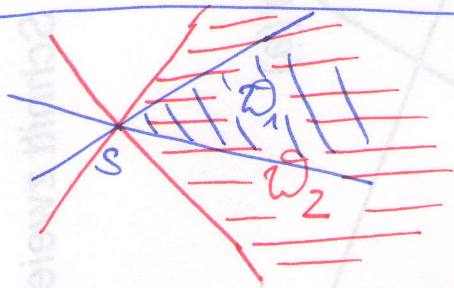
Satz 2.14: $\omega(\mathcal{W}) = 180 \Leftrightarrow \mathcal{W} = \overline{\mathcal{H}_h}$ gestrecktes WF

Winkelmaßaxiom (VII)

Additivität von ω

Satz 2.15 (Monotoniesatz):

$\mathcal{W}_1 \subsetneqq \mathcal{W}_2 \Longrightarrow \omega(\mathcal{W}_1) < \omega(\mathcal{W}_2)$



// Definition 2.5

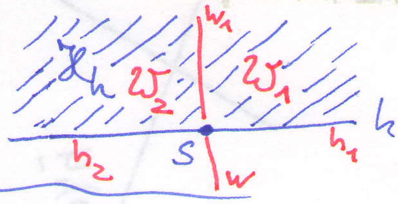
Definition: Winkelhalbierende

// Definition 2.6

Spezialfall: Senkrechte, Lot (Rechtwinkelfelder)

= Winkelhalbierende eines gestreckten WFes

// Definition 2.6

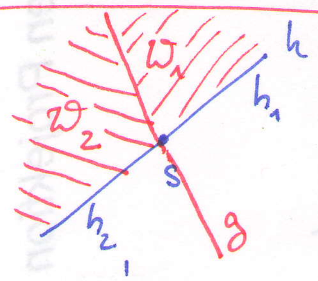


Spezielle Lagen von WFern:

// Definition 2.4

Nebenwinkelfelder:

$\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \overline{{}^{\neg}\mathcal{X}_h}$



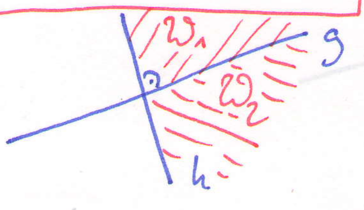
Folgerung aus Winkelmaßaxiom

$\omega(\mathcal{W}_1) + \omega(\mathcal{W}_2) = 180$

// Definition 2.6 (s.o.)

Spezialfall: Rechtwinkelfelder

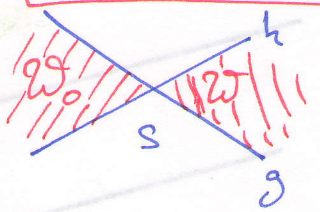
$g \perp h$, d.h.: $\omega(\mathcal{W}_1) = \omega(\mathcal{W}_2) = 90$



// Definition 2.7

Scheitelwinkelfelder:

$\mathcal{W} = \overline{{}^{\neg}\mathcal{X}_h} \cap \overline{{}^{\neg}\mathcal{X}_s}$, $\mathcal{W}_0 = \overline{{}^{\neg}\mathcal{X}_h'} \cap \overline{{}^{\neg}\mathcal{X}_s'}$



Satz 2.16: $\omega(\mathcal{W}) = \omega(\mathcal{W}_0)$

w Winkelhalbierende zu $\mathcal{W}$
$\Longrightarrow$ w Winkelhalbierende zu $\mathcal{W}_0$