Technische Universität Berlin SS 2013
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

Studienrat im Hochschuldienst
Albrecht Gündel-vom Hofe

Zusatzskript zur „Elementargeometrie“

Kap 1: Aussagen- und Prädikatenlogik

Kap. 1.0: Zur Geschichte der Logik

Die *Logik* ist zu verstehen als die „Wissenschaft des formal richtigen Schließens“ und fungiert als vorgängige Wissenschaft für alle anderen Wissenschaften (insbesondere der Mathematik). Als *formalisierte Sprache* bietet sie gegenüber der Umgangssprache und Fachsprachen folgende Vorteile:

- Alle von ihr verwendeten *Symbole* sind *eindeutig definiert*.
- Genau vorgegebene *Regeln* legen fest, wie die Zeichen aneinandergereiht und umgeformt und wie neue Zeichen eingeführt werden dürfen.
- Die in der symbolischen Sprache gebildeten *Formulierungen* sind im allgemeinen *kurz*, *genau* und *übersichtlich*.

Die *mathematische Logik* als Teilgebiet der Mathematik ist relativ jung und bildete sich im Zusammenhang mit *Fragestellungen zu Grundlagenproblemen der Mathematik* erst um die Mitte des 19. Jh. heraus. Dennoch besitzt sie *Vorläufer* in Form der *traditionellen Satz-* und der *traditionellen Regellogik*. Während es in der *Regellogik* um die Aufstellung und Rechtfertigung von zulässigen bzw. stichhaltigen Schluss- und Beweisregeln syntaktischer Art geht, beschäftigt sich die *Satzlogik* mit der Ermittlung von *Tautologien*, also Sätzen, welche allein auf Grund ihrer grammatischen Struktur stets wahr sind.

In der Geschichte der Logik unterscheidet man im wesentlichen folgende *3 Epochen*:

1) Die *Periode der Antike* (ca. 3. Jh. v. Chr. bis 6. Jh. n. Chr.)

   In den Anfängen der griechischen Mathematik tritt im Vergleich zur vorgriechischen Geometrie und Arithmetik der *methodische Aspekt* des Beweisens in den Mittelpunkt. Neben der zweckfreien Freude der alten Griechen an Philosophie und Wissenschaft dürften auch außermathematische Einflüsse für die Entstehung der traditionellen Logik mitverantwortlich sein, wie z.B. die Entstehung der griechischen Stadtparlamente. Hier wurde die *Dialektik* als politisch-juristische Diskussionskunst mit Rede und Gegenrede besonders gepflegt. Erinnert sei auch an die berühmten „sokratischen Dialoge“ Platons, in welchen Platons „Held“ Sokrates seine philosophischen Gegner im Dialog mittels schrittweiser und lückenloser logischer Schlussfolgerungen sich in innere Widersprüche verwickeln lässt (reductio ad absurdum).

   Die wichtigsten Vertreter der Periode der Antike sind:

   a) *Aristoteles* (384 – 323 v. Chr.)
      - begründete die *formale Logik*, vor allem Teile der *Prädikatenlogik* in Form der sogenannten *Syllogistik* oder *Regellogik*, und entwickelte sie bereits sehr weit,
      - verwendete *Variablen* und hatte eine klare Vorstellung von *logischen Gesetzen*,
      - baute ein *formal-logisches System* auf und stellte es bereits *axiomatisch* dar.

      Die Logik des Aristoteles wurde fast etwa 2000 Jahre lang kaum weiterentwickelt.

b) Der Stoiker *Chrysippos* (281/78 – 208/05 v. Chr.)
   - entwickelte die *Aussagenlogik* in Form der sogenannten *Satzlogik* und *axiomatisierte* sie,
   - stellte das Verfahren der *Wahrheitswertetabellen für aussagenlogische Verknüpfungen* dar und erkannte insbesondere die Bedeutung der *Implikation.*

2) Die *Periode der Scholastik* (ca. 11. Jh. bis 15. Jh.)

   Die Ansätze der formalen Satz- und Regellogik aus der Antike gingen in den festen Bestand der philosophischen Bildung des Mittelalters ein. Als Vertreter der Scholastik sind zu nennen: *Peter Abaelard* (1079 – 1142), *Thomas von Aquin* (1225 – 1274), *Duns Scotus* (1266 – 1308) u.a. Merkmale dieser Periode waren:

   - eine zwar nur unwesentliche Weiterführung der aristotelischen Logik, doch erlangte diese insgesamt ein *hohes Niveau* mit einer weitverzweigten *Lehre von den Symbolen, von den Beziehungen zwischen ihnen und ihren Bedeutungen*, insbesondere aufgrund der Verquickung mit *mystisch-religiösen Spekulationen*,
   - weitgehendes Betreiben der Logik auf *metasprachlicher Ebene*,
   - genaue *Unterscheidung zwischen Gesetzen und Regeln*.

3) Die *Periode der Neuzeit* (ca. 17. bis 20. Jh.)

   Die eigentliche Entwicklung der *mathematischen Logik* beginnt mit dem englischen Mathematiker *G. Boole* (1815 – 1864). Diese Entwicklung setzte sich dann schnell fort, und die mathematische Logik gewann bald große Bedeutung. Vertreter der modernen Logik sind u.a. *A. de Morgan* (1806 – 1871), *G. Frege* (1848 – 1925), *G. Peano* (1858 – 1932), *A. N. Whitehead* (1861 – 1947), *D. Hilbert* (1862 – 1943), *B. Russell* (1872 – 1970) sowie *J. Lukasiewiecz* (1878 – 1956), *L. E. J. Brouwer* (1881 – 1966), *J. v. Neumann* (1902 – 1957) und *K. Gödel* (1906 – 1978).

   Kennzeichen der mathematischen Logik sind im wesentlichen:

   - eine *künstliche Sprache*, d.h. die Gesetze werden mittels *Variablen*, *Konstanten* und *Symbolen* dargestellt; diese sind eindeutig und frei von psychologischen, erkenntnistheoretischen und metaphysischen Fragen definiert,
   - eine *formalisierte Methode*, d.h. Regeln beziehen sich auf die Symbole und ihre Verknüpfungen, nicht auf den Inhalt,
   - die *Forderung nach lückenlosen Beweisen* in den Wissenschaften,
   - die genaue *Unterscheidung zwischen Objekt- und Metasprache*.

   Eine gewisse Zwischenstellung bzw. Vorläuferposition zur mathematischen Logik nimmt *G. W. Leibniz* (1646 – 1716) ein, der u.a. die *Idee der formalen Logik* entwickelte und zwischen 1679 und 1690 das Projekt einer *„logica mathematica“* als eine *allgemeine Theorie der Wissenschaften* entwarf, welche analog der Mathematik aufgebaut sein und es erlauben sollte, alle Probleme rechnerisch zu lösen. Leibniz schreibt selbst:

   „Als ich diesem Studium eifrig mich ergab, verfiel ich unausweichlich auf diese bewunderungswürdige Idee, dass nämlich ein Alphabet der menschlichen Gedanken ausgedacht werden könnte und durch die Kombination der Buchstaben dieses Alphabetes und durch die Analyse der aus ihnen entstandenen Worte alles aufgefunden und entschieden werden könnte.

   … Danach wird, wenn eine Meinungsverschiedenheit entsteht, eine Auseinandersetzung zwischen zwei Philosophen nicht mehr notwendig sein, sowenig wie zwischen zwei Rechnenden. Es wird vielmehr genügen, die Feder zur Hand zu nehmen und sich an die Rechentische zu setzen und (wenn es so beliebt, unter Herbeirufung eines Freundes) zueinander zu sagen: Rechnen wir, mein Herr.“

Kap. 1.1: Aussagenlogik

Definition 1:

Unter einer *Aussage* versteht man in der *zweiwertigen Logik* ein sprachliches Gebilde, dem seinem Inhalt nach (zumindest theoretisch) eindeutig ein *Wahrheitswert* der Form „wahr" oder „falsch" zugesprochen werden kann. Gebräuchliche Schreibweisen für die Wahrheitswerte sind:

1 , L(ow) oder *w* für *wahr* (engl. *true*) ; *0* oder *f* für *falsch* (engl. *false*).

Beispiele für Aussagen sind:

„Die Rose ist eine Blume, die auf dem Mars nicht zu finden ist."

„Wenn heute die Sonne scheint, schwänze ich die Mathe-Vorlesung."

„Klaus und Fredi sind Geschwister."

Beispiele, die keine Aussagen sind:

„Herzlich willkommen zur Vorlesung Elementargeometrie!"

„Sind alle anwesend?"

„Der Satz, den Sie hier lesen, ist falsch."

Bemerkung:

Das letzte Beispiel führt bei dem Versuch, den Satz als Aussage mit einem der beiden Wahrheitswerte *wahr* und *falsch* zu belegen, jeweils auf einen Widerspruch. Dies hängt damit zusammen, dass es sich hier quasi um einen „metalogischen" Satz handelt, d.h. um ein sprachliches Gebilde, welches sich selbst zum Inhalt hat.

Eine mögliche Lösung aus diesem Dilemma bietet die Einführung einer *mehrwertigen* Logik an, in der z.B. dem letzten Satz außerhalb der beiden Wahrheitswerte *0* und *1* ein dritter Wahrheitswert *½* (für „halb wahr, halb falsch" bzw. „unentscheidbar") zugewiesen werden kann, ohne dass in diesem Falle Widersprüche auftreten.

In der Aussagenlogik werden anstelle von speziellen Aussagen auch gern Platzhalter (sogenannte *Aussagenvariablen*) verwendet. Sie werden i.a. durch die kleinen Buchstaben p, q, r, … gekennzeichnet. Da an Aussagen im wesentlichen nur die Wahrheitswertebelegung mit *w* bzw. *f* interessiert, nennt man die Aussagenvariablen manchmal auch *Wahrheitswertvariablen*.

Ein wesentliches Anliegen der Aussagenlogik ist es nun, die (syntaktischen) Möglichkeiten zu untersuchen, wie aus gegebenen *elementaren Aussagen* neue Aussagen gebildet werden können. Dazu werden *logische Operatoren* eingeführt, mittels derer man elementare Aussagen miteinander verknüpft. Anhand von sogenannten *Wahrheitstafeln* oder *Wahrheitswertetabellen* wird festgelegt, wie sich der Wahrheitswert einer mittels logischer Operatoren zusammengesetzten Aussage zu den Wahrheitswerten der zugrunde liegenden elementaren Aussagen verhalten soll. Zur Veranschaulichung der Wirkung des jeweiligen Operators setzen wir die beiden folgenden Einzelaussagen voraus:

p : „Heute ist Mathe-Vorlesung." und *q : „Alle Hörer der Vorlesung sind anwesend."*

Die wichtigsten logischen Operatoren (und ihre Sprechweise) zur Verknüpfung von Aussagen sind:

a) die *Negation* „$\neg$" (*non* oder *nicht*), z.B.:

$\boxed{\neg p}$: „Heute ist *keine* Mathe-Vorlesung."

b) die *Konjunktion* „$\wedge$" (*und*), z.B.:

$\boxed{p \wedge q}$: „Heute ist Mathe-Vorlesung, *und* alle Hörer der Vorlesung sind anwesend."

c) die *Disjunktion* oder *Adjunktion* „$\vee$" (inklusives *oder*), z.B.:

$\boxed{p \vee q}$: „Heute ist Mathe-Vorlesung, *oder* alle Hörer der Vorlesung sind anwesend."

d) die (*materielle*) *Implikation* oder *Subjunktion* „$\rightarrow$" (*wenn…dann*), z.B.:

$\boxed{p \rightarrow q}$: „*Wenn* heute Mathe-Vorlesung ist, *dann* sind alle Hörer der Vorlesung anwesend."

e) die (*materielle*) *Äquivalenz* oder *Bijunktion* „$\leftrightarrow$" (*genau dann, wenn* bzw. *dann und nur dann, wenn*), z.B.:

$\boxed{p \leftrightarrow q}$: „Heute ist Mathe-Vorlesung *genau dann*, *wenn* alle Hörer der Vorlesung anwesend sind."

Die zugehörige Wahrheitswertebelegung ist durch folgende *Wahrheitstafel* gegeben:

p	***q***	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
w	*w*	*f*	*w*	*W*	*w*	*w*
w	*f*	*f*	*f*	*W*	*f*	*f*
f	*w*	*w*	*f*	*W*	*w*	*f*
f	*f*	*w*	*f*	*F*	*w*	*w*

<u>*Bemerkungen:*</u>

1. Man beachte, dass für die logischen Operatoren folgende (absteigende) Rangfolge hinsichtlich der Prioritäten gegeben ist: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
2. Wie schon erwähnt, ist der Operator „$\vee$" im *einschließenden* Sinne gebraucht. Um die *Alternative* im *ausschließenden* Sinne (d.h. *„entweder p oder q"*) auszudrücken, muss man wie folgt vorgehen:

   $\boxed{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)}$: „*Entweder* ist heute Mathe-Vorlesung *oder* alle Hörer der Vorlesung sind anwesend."
3. Die materielle Implikation (Subjunktion) $\boxed{p \rightarrow q}$ hat auch folgende „Übersetzungen":

   (i) „*Wenn p*, *dann q*" , (ii) „*q*, *wenn p*" , (iii) „*p nur dann, wenn q*" , (iv) „*p* ist *hinreichend / hinreichende Bedingung* für *q*" , (v) „*q* ist *notwendig / notwendige Bedingung* für *p*"

   Hinsichtlich der materiellen Implikation gibt es 4 zueinander *konjugierte Aussageformen*, nämlich

   (i) die Ausgangsform: $\boxed{p \rightarrow q}$, (ii) das *Konträre* oder *Inverse:* $\boxed{\neg p \rightarrow \neg q}$,

   (iii) das *Konverse:* $\boxed{q \rightarrow p}$ und (iv) das *Kontraponierte:* $\boxed{\neg q \rightarrow \neg p}$.

   Es zeigt sich, dass bei entsprechender Wahrheitswertebelegung der beiden Einzelaussagen *p* und *q* einerseits die *Implikation* und das *Kontraponierte* jeweils dieselben zusammengesetzten Wahrheitswerte liefern sowie andererseits entsprechend das *Konverse* und das *Inverse* (*Konträre*).

<u>*Definition 2:*</u>

Eine aussagenlogische Aussageform heißt eine *Tautologie* (oder *allgemeingültig*, *logische wahr*), wenn bei jeder Belegung der entsprechenden elementaren Aussagen die zusammengesetzte Aussagenform den Wahrheitswert *w(ahr)* liefert. Sie heißt entsprechend eine *Kontradiktion* (oder *unerfüllbar*, *logisch falsch*), wenn bei jeder Wahrheitswertebelegung der Einzelaussagen bei der Gesamtaussageform der Wahrheitswert *f(alsch)* herauskommt. Ist die Aussageform weder allgemeingültig noch unerfüllbar, so heißt sie *teilgültig*.

Zwei aussagenlogische Aussageformen p und q heißen *logisch äquivalent* (in Zeichen: $\boxed{p \Leftrightarrow q}$), falls die (zusammengesetzte) Aussageform $p \leftrightarrow q$ eine Tautologie ist.

<u>*Bemerkung:*</u>

Die *logische Äquivalenz* $\boxed{p \Leftrightarrow q}$ ist von der *materiellen Äquivalenz* $\boxed{p \leftrightarrow q}$ sauber zu unterscheiden. Während das Zeichen „$\leftrightarrow$“ einen *logischen Operator* darstellt und damit zur *Objektsprache* der Aussagenlogik gehört, ist „$\Leftrightarrow$“ ein *metasprachliches* Zeichen. Näheres zu *Objekt-* und *Metasprache* am Beginn von Kapitel 1.2 (S. 7 Mitte im Skript).

Es folgen nun einige wichtige aussagenlogische Gesetze, welche mittels der *logischen Äquivalenz* formuliert sind. Dabei steht *0* stellvertretend für eine beliebige *Kontradiktion* sowie *1* für eine beliebige *Tautologie*.

	Konjunktion „$\wedge$“	**Disjunktion „$\vee$“**
Assoziativgesetze	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Kommutativgesetze	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Distributivgesetze	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge r$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Absorptionsgesetze	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
Idempotenzgesetze	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$	$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$
Gesetz der doppelten Negation	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	
De Morgans Gesetze	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
Gesetze für 0 und 1	$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	$p \vee 0 \Leftrightarrow p$ $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$
	$\neg 1 \Leftrightarrow 0$, $\neg 0 \Leftrightarrow 1$	
Rückführung der Implikation auf „$\neg$“ und „$\vee$“	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	
Kontrapositionsgesetz	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	
Rückführung der Äquivalenz auf „$\rightarrow$“ und „$\wedge$“	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	
Rückführung der Äquivalenz auf „$\neg$“, „$\wedge$“ und „$\vee$“	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	

<u>Bemerkung:</u>

Man beachte das *Dualitätsprinzip*: Wird in einer logischen Äquivalenz überall das Zeichen „$\wedge$“ durch „$\vee$“ ersetzt und umgekehrt und gleichzeitig das Zeichen *1* gegen *0* ausgetauscht und umgekehrt, so geht ein Gesetz der Disjunktion in ein analoges Gesetz über die Konjunktion über und umgekehrt.

Zwei Gesetze, die auf diese Weise ineinander übergeführt werden können, nennt man *zueinander dual*.

<u>Definition 3:</u>

Unter einer *Wahrheitsfunktion* versteht man eine Abbildung, die bei einer aussagenlogischen Verknüpfung jeder Belegung von Wahrheitswerten hinsichtlich der elementaren Aussagen eindeutig einen Wahrheitswert für die Verknüpfung zuordnet. Insbesondere sind die *Wahrheitstafeln* bzw. *Wahrheitswertetabellen* als Wahrheitsfunktionen zu verstehen. Zwei Wahrheitsfunktionen heißen *gleich*, wenn bei jeder Wahrheitswertebelegung der elementaren Aussagen für beide Funktionen derselbe Wahrheitswert herauskommt.

<u>Bemerkung:</u>

Sei φ die Wahrheitsfunktion, die einer Aussage p ihren Wahrheitswert zuordnet, also:

$$\boxed{\varphi(p) = 0 \;\Leftrightarrow\; p \text{ ist } \textit{falsch} \quad \text{und} \quad \varphi(p) = 1 \;\Leftrightarrow\; p \text{ ist } \textit{wahr}\,.}$$

Dann gilt für beliebige Aussageformen p und q unabhängig von ihrem Wahrheitswert:

(i) $\boxed{\varphi(p)\cdot\varphi(p) = \varphi(p)}$, (ii) $\boxed{\varphi(\neg p) = 1 - \varphi(p)}$, (iii) $\boxed{\varphi(p \wedge q) = \varphi(p)\cdot\varphi(q)}$,

(iv) $\boxed{\varphi(p \vee q) = \varphi(p) + \varphi(q) - \varphi(p)\cdot\varphi(q)}$

Eine aussagenlogischen Äquivalenz $p \Leftrightarrow q$ zwischen zwei beliebigen Aussageformen p und q lässt sich nun auch mittels φ durch den Nachweis der Gleichheit $\varphi(p) = \varphi(q)$ unabhängig von der Wahrheitswertebelegung für p und q mittels „Rechnung“ überprüfen.

<u>Beispiel:</u>

Wir beweisen das eine Gesetz von De Morgan $(*)$ $\boxed{\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q}$ mittels der Wahrheitsfunktion φ .

Dabei gilt für die linke Seite der logischen Äquivalenz:

$$\varphi(\neg(p \wedge q)) = 1 - \varphi(p \wedge q) = \underline{1 - \varphi(p)\cdot\varphi(q)}\ .$$

Für die rechte Seite der Gleichung $(*)$ gilt:

$$\varphi(\neg p \vee \neg q) \;=\; \varphi(\neg p) + \varphi(\neg q) - \varphi(\neg p)\cdot\varphi(\neg q) \;=\; (1 - \varphi(p)) + (1 - \varphi(q)) -$$
$$(1 - \varphi(p))\cdot(1 - \varphi(q)) \;=\; 2 - \varphi(p) - \varphi(q) - (1 - \varphi(p) - \varphi(q) + \varphi(p)\cdot\varphi(q)) \;=$$
$$2 - \varphi(p) - \varphi(q) - 1 + \varphi(p) + \varphi(q) - \varphi(p)\cdot\varphi(q) \;=\; \underline{1 - \varphi(p)\cdot\varphi(q)}$$

Also gilt: $\varphi(\neg(p \wedge q)) = \varphi(\neg p \vee \neg q)$ unabhängig von der Belegung von p und q mit einzelnen Wahrheitswerten, wodurch die logische Äquivalenz $\boxed{\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q}$ bewiesen ist.

Kap. 1.2: Gültige Schlüsse und Beweisverfahren

<u>*Definition 4:*</u>

Seien α und β zwei *aussagenlogische Aussageformen*. Man sagt: *„α impliziert logisch β"* bzw. *„Aus α folgt logisch β"* , wenn die Aussageform $\boxed{\alpha \to \beta}$ eine Tautologie darstellt. Man schreibt in diesem Fall auch: $\boxed{\alpha \Rightarrow \beta}$.

Hat man anstelle von α mehrere Aussageformen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so sagt man allgemeiner: *„Aus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ folgt logisch β"* genau dann, wenn $\boxed{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta}$ eine Tautologie ist, und schreibt in diesem Fall analog: $\boxed{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta}$.

<u>*Bemerkung:*</u>

Die *logische Implikation* $\boxed{p \Rightarrow q}$ muss (analog zur logischen Äquivalenz) sauber von der *materiellen Implikation* $\boxed{p \to q}$ unterschieden werden. Während das Zeichen „$\to$" als *logischer Operator* zum Bereich der *Objektsprache* der Aussagenlogik gehört, ist „$\Rightarrow$" ein *metasprachliches* Symbol.

In diesem Zusammenhang einige allgemeine erklärende Worte zur Objekt- und zur Metasprache:

In der *Objektsprache* verweisen die Zeichen bzw. Symbole auf *außersprachliche Gegenstände*, nämlich die Objekte. Aussagen der Objektsprache sind somit z.B.:

„ *5* ist eine Zahl." bzw. „*Bettina* und *Andrea* sind Freundinnen."

Die *Metasprache* hingegen befasst sich mit den *Zeichen* bzw. *Symbolen* selbst, nicht mit den Objekten. Folgende Sätze sind somit Beispiele für metasprachliche Aussagen:

„ *'5'* ist eine arabische Ziffer." bzw. „*'Bettina'* und *'Andrea'* sind weibliche Vornamen."

Objekt- und *Metasprache* stellen *Sprachen verschiedener Stufen* dar. Man nennt die *Objektsprache* auch *Sprache erster Stufe*, während die *Metasprache* eine *Sprache zweiter Stufe* darstellt, mittels derer über die Objektsprache gesprochen werden kann. Damit gilt:

Aussagen über die objektsprachlichen Ausdrücke werden in der Metasprache gemacht.

Im Fall der Logik dienen die *logische Äquivalenz* und die *logische Implikation* dazu, Aussagen über die aussagenlogischen Aussageformen selbst zu treffen.

<u>*Definition 5:*</u>

Ein *Beweis* ist ein Prozess, bei dem aus gewissen Voraussetzungen (=*Prämissen*) Folgesätze (=*Konklusionen*) gewonnen werden. Der Übergang von einer oder mehreren Prämissen zu einer Konklusion wird ein *Schluss* genannt. Eine Anleitung, wie man dabei vorgehen kann, heißt eine *Schlussregel*.

Wir bezeichnen nun eine Schlussregel genau dann als *gültig*, *richtig* oder *korrekt*, wenn aus den Prämissen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Konklusion β logisch folgt, d.h. wenn gilt:

$$\boxed{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta}$$

Häufig werden die Schlussregeln in Form sogenannter *Schlussfiguren* geschrieben, wobei die einzelnen Prämissen untereinander zu stehen kommen und unterhalb einer horizontalen Trennlinie die Konklusion folgt:

$$\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{array}\right\} & \textit{Prämissen} \\ \hline \beta & \textit{Konklusion} \end{array}$$

Es folgen nun die am häufigsten verwendeten gültigen Schlussregeln in Form einer Tabelle:

modus barbara	**modus ponens**	**modus tollens**	**Form 1**	**Form 2**
$p \to q$ $\underline{q \to r}$	p $\underline{p \to q}$	$\neg q$ $\underline{p \to q}$	p $\underline{q}$	$p \vee q$ $\underline{\neg p}$
$\boldsymbol{p \to r}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\neg p}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{q}$

Form 3	**Form 4**	**Form 5**	**Indirekter Beweis (Form 1)**	**Indirekter Beweis (Form 2)**
$\underline{p \wedge q}$	$\underline{p}$	$\underline{\neg p}$	$\underline{\neg p \to p}$	p $\underline{(p \wedge \neg q) \to (r \wedge \neg r)}$
$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{p \to q}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$

Die Anwendung des *modus ponens*, des *modus tollens* und des *modus barbara* als Schlussregeln soll durch Beispiele belegt werden.

<u>*Beispiele:*</u>

Seien folgende Aussagen gegeben:

p: „Die Mathe-Vorlesung fällt aus.“
q: „Die Hörer der Vorlesung freuen sich.“
r: „Der Mathe-Dozent ist krank.“

a) Regel zum *modus ponens* (=*bejahende Abtrennungsregel*):

p	*Prämisse*	Die Mathe-Vorlesung fällt aus.
$p \to q$	*Prämisse*	Wenn die Mathe-Vorlesung ausfällt, freuen sich die Hörer der Vorlesung.
q	*Konklusion*	Die Hörer der Vorlesung freuen sich.

b) Regel zum *modus tollens* (=*verneinende Abtrennungsregel*):

$\neg q$	*Prämisse*	Die Hörer der Vorlesung freuen sich *nicht*.
$p \to q$	*Prämisse*	Wenn die Mathe-Vorlesung ausfällt, freuen sich die Hörer der Vorlesung.
$\neg p$	*Konklusion*	Die Mathe-Vorlesung fällt *nicht* aus.

c) Regel zum *modus barbara* (=*Kettenschlussregel*):

$r \to p$	*Prämisse*	Wenn der Mathe-Dozent krank ist, fällt die Mathe-Vorlesung aus.
$p \to q$	*Prämisse*	Wenn die Mathe-Vorlesung ausfällt, freuen sich die Hörer der Vorlesung.
$r \to q$	*Konklusion*	Wenn der Mathe-Dozent krank ist, freuen sich die Hörer der Vorlesung.

<u>Bemerkung:</u>
Um einen Schluss bzw. eine Schlussregel als *ungültig* bzw. *unkorrekt* nachzuweisen, muss man zeigen, dass die entsprechende Subjunktion $\boxed{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta}$ *keine* Tautologie ist. Dies ist insbesondere dann erreicht, wenn man eine in sich nicht widersprüchliche Wahrheitswertebelegung finden kann, bei der die Prämissen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sämtlich den Wahrheitswert *1* erhalten und die Konklusion β den Wahrheitswert *0* . Genau dann nämlich erhält die Subjunktion $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta$ den Wahrheitswert *0* .

<u>Beispiel:</u>
Wir werden zeigen, dass der folgende Schluss unkorrekt ist:

$p \to q$	*Prämisse*	Wenn die Mathe-Vorlesung ausfällt, freuen sich die Hörer der Vorlesung.
q	*Prämisse*	Die Hörer der Vorlesung freuen sich.
p	*Konklusion*	Die Mathe-Vorlesung fällt aus.

Dazu betrachten wir folgende Zeile aus der Wahrheitswertetabelle für die aussagenlogische Aussageform $\boxed{q \wedge (p \to q) \to p}$:

p	q	$p \to q$	$q \wedge (p \to q)$	$\boldsymbol{q \wedge (p \to q) \to p}$
0	**1**	**1**	**1**	**0**
Konklusion	*Prämisse*	*Prämisse*		*Schluss*

Wie man sieht, können in der Wahrheitstabellenzeile bei Vorbelegung der Prämissen mit dem Wahrheitswert *1* und der Konklusion mit dem Wahrheitswert *0* die übrigen „Lücken" widerspruchsfrei ausgefüllt werden, so dass am Ende der Schluss den Wahrheitswert *0* erhält. Damit ist aber die Inkorrektheit des vorliegenden Schlusses nachgewiesen.

Zum Abschluss dieses Abschnittes noch einmal ein Beispiel zur Herleitung einer *Konklusion* aus gegebenen *Prämissen* durch fortgesetzte Anwendung gültiger Schlussregeln (im Form von Schlussfiguren):

<u>Beispiel:</u>
Folgende Behauptungen, die sich auf eine Mahlzeit beziehen, seien *Prämissen*:

(i) Wenn er Kaffee nimmt, trinkt er keine Milch.
(ii) Er isst *nur dann* Brötchen, *wenn* er Milch trinkt. (*Vorsicht mit „nur dann, wenn…" Siehe dazu auch unter Bemerkungen (3) auf Seite 4 unten*])

(iii) Er nimmt keine Suppe, wenn er nicht Brötchen isst.
(iv) Heute mittag trank er Kaffee.

Kann aus diesen Prämissen *korrekt geschlossen* werden, ob er heute mittag Suppe nahm bzw. nicht nahm?

Um unsere Kenntnisse über Schlussregeln anwenden zu können, formalisieren wir zunächst die elementaren Aussagen, wie folgt:

p: „Er trinkt Kaffee.“ *r:* „Er isst Brötchen.“
q: „Er trinkt Milch.“ *s:* „Er nimmt Suppe.“

Dann erhält man die zu untersuchenden Schlüsse in Form folgender Schlussfiguren:

$$\text{Fall a) :}\quad \boxed{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{c} p \to \neg q \\ r \to q \\ \neg r \to \neg s \\ p \end{array}\right\} & \textit{Prämissen} \\ \hline s & \textit{Konklusion} \end{array}}\quad , \text{Fall b) :}\quad \boxed{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{c} p \to \neg q \\ r \to q \\ \neg r \to \neg s \\ p \end{array}\right\} & \textit{Prämissen} \\ \hline \neg s & \textit{Konklusion} \end{array}}$$

Wir versuchen es nun zunächst mit einer direkten Herleitung einer *Konklusion*:

$$\begin{array}{ll} p & \textit{Prämisse} \\ p \to \neg q & \textit{Prämisse} \\ \hline \neg q & \textit{modus ponens} \\ r \to q & \textit{Prämisse} \\ \hline \neg r & \textit{modus tollens} \\ \neg r \to \neg s & \textit{Prämisse} \\ \hline \neg \boldsymbol{s} & \textit{modus ponens} \end{array}$$

Durch fortgesetztes Anwenden von *modus ponens* und *modus tollens* unter impliziter Verwendung des *modus barbara* lässt sich aus den gegeben Prämissen folgende *Konklusion* logisch korrekt herleiten:

$$\boxed{\neg \boldsymbol{s} : \text{" \textit{Er nahm heute mittag keine Suppe}."}}$$

Wir zeigen noch durch Angabe einer speziellen Wahrheitsbelegung, dass Fall a) einen *unkorrekten Schluss* darstellt:

p	*Q*	*r*	*s*	$\neg q$	$\neg r$	$\neg s$
1	<u>0</u>	<u>0</u>	**0**	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>
Prämisse	*(3)*	*(4)*	*Konklusion*	*(2)*	*(5)*	*(1)*

$p \to \neg q$	$r \to q$	$\neg r \to \neg s$
1	**1**	**1**
Prämisse	*Prämisse*	*Prämisse*

Man erkennt: es gibt eine in sich widerspruchsfreie Wahrheitswertebelegung, welche für die Subjunktion $\boxed{p \wedge (p \to \neg q) \wedge (r \to q) \wedge (\neg r \to \neg s) \to s}$ den Wahrheitswert *0* liefert. Somit ist diese Aussageform *keine Tautologie*, d.h. es liegt in diesem Falle ein *unkorrekter Schluss* vor. Die in Klammern stehenden Zahlen zeigen an, in welcher Reihenfolge nach Vorbelegung der *Prämissen* mit dem Wahrheitswert *1* und der *Konklusion* mit dem Wahrheitswert *0* die restlichen „Lücken" in der Wahrheitswertetabellenzeile mit entsprechenden widerspruchsfreien Wahrheitswerten zu füllen sind.

Zu Kap. 1.3: Prädikatenlogik

Hinsichtlich des inneren Aufbaus von Sätzen zeigt sich, dass elementare Aussagen aus *Subjekten* als Namen für Einzeldinge (Objekte, Individuen) und aus *Prädikaten* zusammengesetzt sind. Je nach der Anzahl an Subjekten, die ein Prädikat für einen vollständigen Satz benötigt, spricht man von *ein-*, *zwei-*, *drei-* bzw. allgemein *n-stelligen Prädikaten*.

Beispiele:

„…ist ein Lebewesen" ist z.B. ein *einstelliges Prädikat,*
„…und…sind Geschwister" dagegen ein *zweistelliges Prädikat.*
„…ist eine Zahl zwischen…und…" bezeichnet ein *dreistelliges Prädikat* usw.

Definition 6:

Eine Verbindung eines Prädikats mit der entsprechenden Anzahl an *Variablen* anstelle von Subjekten nennt man eine *prädikative Aussageform*. Die Variablen nennt man auch *Individuenvariablen* und den Bereich, aus dem für die jeweils entsprechende Variable konkrete Subjekte eingesetzt werden können, *Individuenbereich* oder *Grundbereich für die Variable*. Für eine prädikative Aussageform mit einem n-stelligen Prädikat und entsprechend n Variablen verwenden wir im folgenden die Schreibweise: $\boxed{p(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

Bemerkung:

Setzt man insbesondere für jede Variable ein Subjekt ein, so geht die prädikative Aussageform in ein *aussagenlogische Aussage* über, der man dann den Wahrheitswert *1* bzw. *0* zuordnen kann. Man achte aber dabei darauf, dass in einer prädikativen Aussageform an *jeder Stelle*, an der *dieselbe Variable* steht, die Variable durch *dasselbe Subjekt* ersetzt werden muss. Auf jeden Fall sollte man sich merken:

Einer prädikativen Aussageform kann man selbst keinen Wahrheitswert zuordnen.

Beispiele:

$p(x)$: „x ist ein Lebewesen" und $q(x,y)$: „$x + y$ ist eine gerade Zahl" sind jeweils Beispiele für prädikative Aussageformen.

Dann erhält man Aussagen z.B. in folgender Form:

p(Löwe) : „(Ein) *Löwe* ist ein Lebewesen" (Wahrheitswert: *1*) ,
p(Stein) : „(Ein) *Stein* ist ein Lebewesen" (Wahrheitswert: *0*) ,
q(2, 3) : „*2 + 3* ist eine gerade Zahl" (Wahrheitswert: *0*),
q(5, 1) : „*5 + 1* ist eine gerade Zahl" (Wahrheitswert: *1*).

Setzt man speziell bei $q(.,.)$ an jeder Stelle dieselbe Variable ein – also $q(x, x)$: „$x + x$ ist eine gerade Zahl" –, so erhält man bei Ersetzen von „x" durch ein beliebiges Subjekt (Individuum) aus dem Individuenbereich der natürlichen Zahlen stets eine wahre Aussage:

$q(5, 5)$: „$5 + 5$ ist eine gerade Zahl" und $q(2, 2)$: „$2 + 2$ ist eine gerade Zahl"
sind jeweils Aussagen mit *Wahrheitswert 1* .

Neben der *Ersetzung der Individuenvariable(n) durch* (eine) konkrete *Subjektkonstante(n)* (oder *Subjekte*) gibt es noch eine weitere Möglichkeit, eine prädikative Aussageform in eine Aussage zu überführen: durch *Bildung einer Existenzaussage oder einer Allaussage*.

Definition 7:

Ist p(x, y, …) ein ein- bzw. mehrstelliges Prädikat, so heißt eine Aussage der Form

(i) *„Für alle (jedes) x, y, … gilt:* p(x, y, …)*"* eine *Allaussage*,

(ii) *„Es gibt / existiert (mindestens) ein x, y ,… , für das gilt:* p(x, y,…)*"* oder *„Für mindestens ein x, y, … gilt:* p(x,y,…)*"* eine *Existenzaussage*.

Zur Bildung von All- und Existenzaussagen verwendet man in der Prädikatenlogik spezielle *Quantoren*, nämlich

(i) den *Allquantor* (in Zeichen: $\boxed{\forall x,y,z: \ldots}$ oder $\boxed{\bigwedge_{x,y,z} \ldots}$) für Allaussagen und

(ii) den *Existenzquantor* (in Zeichen: $\boxed{\exists x,y,z: \ldots}$ oder $\boxed{\bigvee_{x,y,z} \ldots}$) für Existenzaussagen.

Wir werden ab jetzt stets die Schreibweise mit dem um 180° gedrehten „*A*" und „*E*" verwenden. D.h. für ein (ein- oder mehrstelligen) Prädikat und Individuenbereiche X, Y,… stellt $\boxed{\forall x \in X \ \forall y \in Y \ldots: \ p(x,y,\ldots)}$ somit eine *Allaussage* und $\boxed{\exists x \in X \ \exists y \in Y \ldots: \ p(x,y,\ldots)}$ entsprechend eine *Existenzaussage* dar.

Bemerkungen:

1. Ob eine All- oder Existenzaussage wahr oder falsch ist, hängt wesentlich mit von der Auswahl der zugrunde liegenden *Individuenbereiche für die* auftretenden *Individuenvariablen* ab. So gilt z.B. unter Verwendung von $\boldsymbol{R}$ für den Bereich der reellen Zahlen und $\boldsymbol{N}$ für den Bereich der natürlichen Zahlen:
   Während p : „$\forall x \in \boldsymbol{N}: \ (x^2 \geq x)$ " eine *wahre* Aussage ist, stellt q : „$\forall x \in \boldsymbol{R}: \ (x^2 \geq x)$ " eine *falsche* Aussage dar, denn z.B. gilt für $x = \frac{1}{2} \in \boldsymbol{R}$: $x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x$.
2. Die Variablen, die im Zusammenhang der *Quantifizierung* einer prädikativen Aussageform unter einem Quantor auftauchen, werden auf diese Weise quasi gebunden. Daher nennt man solche Individuenvariablen auch *gebundene Variablen*. Die übrigen Variablen in einer prädikativen Aussageform, die *nicht* durch einen Quantor gebunden sind, nennt man *freie Variablen*.
   So sind z.B. in der Aussageform $\boxed{\forall x \in \boldsymbol{N} \ \exists y \in \boldsymbol{N}: \ x + y = z}$ die beiden *Variablen* x und y durch den jeweiligen Quantor *gebunden*, während z eine *freie Variable* bezeichnet.

3. Die Angabe des *Individuenbereichs* kann hinter dem entsprechenden Quantor erfolgen oder auch in der prädikatenlogische Aussageform „verpackt“ werden, wie z.B.:
$\boxed{\forall x \in X\ \exists y \in Y \ldots :\ \ p(x,y,\ldots)} = \boxed{\forall x\, \exists y \ldots :\ \ (x \in X \wedge y \in Y \wedge \ldots) \to p(x,y,\ldots)}$

4. Stehen ein All- und ein Existenzquantor hintereinander, so formuliert man:
(i) $\boxed{\forall x\ \exists y \ldots :\ \ p(x,y,\ldots)}$: *„Zu jedem x gibt es ein y mit $p(x, y)$.“*
(ii) $\boxed{\exists x\ \forall y \ldots :\ \ p(x,y,\ldots)}$: *„Es gibt (mind.) ein x , so dass für alle y gilt: $p(x, y)$.“*

Hierbei spielt die *Reihenfolge* der Quantoren eine wesentliche Rolle und muss berücksichtigt werden, wie folgendes Beispiel lehrt:

Sei F der Individuenbereich der Frauen und M der Individuenbereich der Menschen. Sei weiterhin $p(x, y)$: „ x ist Mutter von y “ ein zweistelliges Prädikat. Dann gilt:

(i) $\boxed{\forall y \in M\ \exists x \in F :\ \ p(x,y)}$: „Zu jedem Menschen y gibt es eine Frau x , die Mutter von y ist.“

(ii) $\boxed{\exists x \in F\ \forall y \in M :\ \ p(x,y)}$: „Es gibt eine Frau x , so dass für alle Menschen y gilt: x ist Mutter von y .“

Wie man unschwer bemerkt, ist (i) eine *wahre* Aussage, während (ii) schlichtweg *falsch* ist. In der Aussage (i) ist jedem „y“ quasi sein *spezielles* (oder privates) „x“ (d.h. seine eigene Mutter) zugeordnet, während in der Aussage (ii) das „x“ ein *universelles* (oder allgemeingültiges) Element für alle „y“ (d.h. eine Allmutter) darstellt.

In der Prädikatenlogik gelten wie auch in der Aussagenlogik entsprechende *prädikatenlogische Gesetze*, die nun im folgenden aufgelistet seien (Dabei stehe „=“ für eine *logische Äquivalenz*, „⇒“ für eine *logische Implikation*):

	Allquantor „∀“	***Existenzquantor „∃“***
Negationsregeln	$\neg\forall x : p(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg p(x)$	$\neg\exists x : p(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg p(x)$
Vertauschbarkeitssätze	$\forall x\ \forall y : p(x,y) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x : p(x,y)$	$\exists x\ \exists y : p(x,y) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x : p(x,y)$
Verträglichkeitsregeln	$(\forall x : p(x)) \wedge (\forall x : q(x)) \Leftrightarrow$ $\forall x : p(x) \wedge q(x)$	$(\exists x : p(x)) \vee (\exists x : q(x)) \Leftrightarrow$ $\exists x : p(x) \vee q(x)$
Implikationen (⇒) *(∀ und ∨ / ∃ und ∧)*	$(\forall x : p(x)) \vee (\forall x : q(x)) \Rightarrow$ $\forall x : p(x) \vee q(x)$	$\exists x : p(x) \wedge q(x) \Rightarrow$ $(\exists x : p(x)) \wedge (\exists x : q(x))$
Implikationen (⇒) *(∀ und →)*	$\forall x : p(x) \to q(x) \Rightarrow$ $(\forall x : p(x)) \to (\forall x : q(x))$	$\forall x : p(x) \to q(x)) \Rightarrow$ $(\exists x : p(x)) \to (\exists x : q(x))$
Vertauschbarkeit von „∀“ und „∃“	$\exists x\ \forall y : p(x, y) \Rightarrow \forall y\ \exists x : p(x, y)$	
„Spezialisierung“ bzgl. x_0	$\forall x : p(x) \Rightarrow p(x_0)$	$p(x_0) \Rightarrow \exists x : p(x)$

<u>*Bemerkungen:*</u>

1. Hinsichtlich der *Vertauschbarkeit* von „∀“ und „∃“ wurde an einem Beispiel schon gezeigt, dass durchaus die Aussage „$\forall y\ \exists x : p(x, y)$“ *wahr* sein kann, während mit vertauschten Quantoren dann eine *falsche* Aussage „$\exists x\ \forall y : p(x, y)$“ entsteht.

2. Aus der *„Spezialisierung“* folgt, dass insbesondere eine *Existenzaussage* als *wahr* nachgewiesen ist, wenn für ein spezielles Subjekt „x_0“ die Aussage $p(x_0)$ wahr ist. Dies kann man als *Beweis einer Existenzaussage durch Angabe eines konkreten Beispiels* verstehen. Andererseits folgt aus der *Wahrheit* einer *Allaussage*, dass durch Ersetzen der Individuenvariable durch ein *beliebiges* konkretes Subjekt „x_0“ aus dem Individuenbereich stets eine wahre Aussage $p(x_0)$ entsteht.
3. Die *Vertauschbarkeitssätze* gestatten es, mehrere durch einen Allquantor gebundene Variablen unter einem Quantorensymbol zusammenzufassen, wenn sie hintereinander stehen, also: $\boxed{\forall x,y,z,\ldots : \mathrm{p}(x,y,z,\ldots) := \forall x\ \forall y\ \forall z\ \ldots : \mathrm{p}(x,y,z,\ldots)}$

   bzw. $\boxed{\exists x,y,z,\ldots : \mathrm{p}(x,y,z,\ldots) := \exists x\ \exists y\ \exists z\ \ldots : \mathrm{p}(x,y,z,\ldots)}$.
4. Besonders wichtig sind die *Negationsregeln*. Sie stellen quasi eine Verallgemeinerung der *De Morganschen Regeln* aus der Aussagenlogik dar. Insbesondere ist damit die *Negation einer Allaussage* eine *Existenzaussage* und umgekehrt die *Negation einer Existenzaussage* eine *Allaussage*. Angewandt auf eine prädikatenlogische Aussage mit mehreren Quantoren heißt dies als verallgemeinerte Regel:

   Man verneint eine prädikatenlogische Aussage, indem jeder Allquantor durch einen Existenzquantor und jeder Existenzquantor durch einen Allquantor ersetzt und anschließend die prädikatenlogische Aussageform negiert wird.

   Also gilt z.B. $\boxed{\neg\left(\forall x\ \exists y\ \forall z : \mathrm{p}(x,y,z)\right) = \exists x\ \forall y\ \exists z : \neg\mathrm{p}(x,y,z)}$

Zum Abschluss dieses Kapitels über Logik (speziell dieses Abschnittes über Prädikatenlogik) sollen noch einmal einige Beispiele für die Formalisierung von umgangssprachlichen Sätzen in prädikatenlogische Aussagen und deren Negation gegeben werden:

<u>*Beispiele:*</u>

Folgende Aussagen sind zu formalisieren und dann zu negieren:

(i) *„Alle Teilnehmer der LV ‘Elementargeometrie‘ sind verheiratet und rauchen.“*

(ii) *„Es gibt Teilnehmer der LV ‘Elemtargeometrie‘, die rauchen, wenn sie verheiratet sind.“*

(iii) *„Es gibt männliche Teilnehmer der LV ‘Elementargeometrie‘, die mit sämtlichen weiblichen Teilnehmern der LV ‘Elementargeometrie‘ nichts anfangen können.“*

(iv) *„Alle Teinehmer der LV ‘Elementargeometrie‘ haben (mindestens) eine Vorlesung, die sie gern besuchen.“*

Als ersten Schritt zur Formalisierung führen wir Prädikate und Individuenbereiche ein.

Individuenbereiche:

S sei der Bereich der Teilnehmer der LV ‘Elementargeometrie’ an der FU Berlin, F der Bereich der weiblichen und M der Bereich der männlichen Teilnehmer an der Vorlesung sowie V der (weit gefasste) Bereich sämtlicher Vorlesungen an den drei Berliner Universitäten.

Prädikate bzw. elementare prädikatenlogische Aussageformen:

$v(x)$: „x ist verheiratet.“ $r(x)$: „x raucht.“ $a(x, y)$: „x kann mit y nichts anfangen.“
$b(x, y)$: „x besucht y gern.“

Damit können wir die gegebenen *Aussagen*, wie folgt, *formalisieren*:

(i) $\forall x \in S : v(x) \wedge r(x)$, (ii) $\exists x \in S : v(x) \rightarrow r(x)$, (iii) $\exists x \in M\ \forall y \in F : a(x, y)$,
(iv) $\forall x \in S\ \exists y \in V : b(x, y)$.

Nun wollen wir zunächst formal negieren:

(i) $\neg(\ \forall x{\in}S:\ v(x) \wedge r(x)\ )\ \Leftrightarrow\ \exists x{\in}S:\ \neg(\ v(x) \wedge r(x)\ )\ \Leftrightarrow\ \boxed{\exists x \in S: \neg v(x) \vee \neg r(x)}$

(ii) $\neg(\ \exists x{\in}S:\ v(x) \to r(x)\ )\ \Leftrightarrow\ \forall x{\in}S:\ \neg(\ v(x) \to r(x)\ )\ \Leftrightarrow\ \forall x{\in}S:\ \neg(\ \neg v(x) \vee r(x)\ )$

$\Leftrightarrow\ \forall x{\in}S:\ (\neg\neg\ v(x) \wedge \neg\ r(x)\ )\ \Leftrightarrow\ \boxed{\forall x \in S: v(x) \wedge \neg r(x)}$

(iii) $\neg(\ \exists x{\in}M\ \forall y{\in}F:\ a(x, y)\ )\ \Leftrightarrow\ \boxed{\forall x \in M\ \ \exists y \in F: \neg a(x, y)}$

(iv) $\neg(\ \forall x{\in}S\ \exists y{\in}V:\ b(x, y)\ )\ \Leftrightarrow\ \boxed{\exists x \in S\ \ \forall y \in V: \neg b(x, y)}$

Auf „gut deutsch" lauten daher die Negationen (Verneinungen) der Aussagen (i) - (iv) :

(i) *„Es gibt* (*mindestens*) *eine Teilnehmerin/einen Teilnehmer der LV 'Elementargeometrie', die/der nicht verheiratet ist oder nicht raucht."*

oder(etwas freier):

„Mindestens eine Teilnehmerin/ein Teilnehmer der LV 'Elementargeometrie' ist nicht verheiratet oder raucht nicht."

(ii) *„Für jede Teilnehmerin/ jeden Teilnehmer der LV 'Elementargeometrie' gilt, dass er verheiratet ist und nicht raucht."*

oder (etwas freier):

„Sämtliche (alle) Teilnehmer/innen der 'Elementargeometrie' sind verheiratet und rauchen nicht."

(iii) *„Für jeden (männlichen) Teilnehmer der 'Elementargeometrie' x existiert eine (weibliche) Teilnehmerin der LV 'Elementargeometrie' y , so dass <u>nicht</u> gilt: x kann mit y nichts anfangen."*

oder (etwas freier):

„Jeder männliche Teilnehmer der 'Elementargeometrie' findet (mindestens) eine weibliche Teilnehmerin der 'Elementargeometrie', mit der er etwas anfangen kann."

(iv) *„Es gibt (mindestens) eine Teilnehmerin/einen Teilnehmer der 'Elementargeometrie', so dass für alle Vorlesungen gilt: sie/er besucht sie nicht gern."*

oder (etwas freier):

„Es gibt (mindestens) eine Teilnehmerin/einen Teilnehmer der LV 'Elementargeometrie', die/der sämtliche Vorlesungen nicht gern besucht."

****