§4 Sätze der Elementargeometrie und das Streckungsaxiom

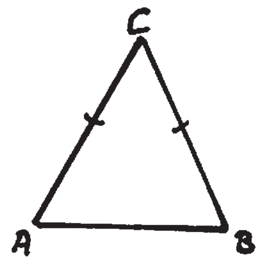
Viele Sätze der Elementargeometrie haben Aussagen über Dreiecke zum Inhalt.

Definition 4.1:

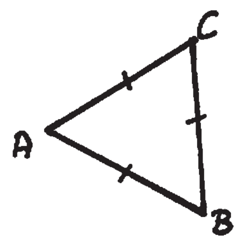
Jede Menge von drei nicht kollinearen Punkten, $\{P,Q,R\}$, heißt ein DREIECK. Die Punkte P,Q,R heißen ECKEN, die Strecken $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RP}$ heißen SEITEN, die Winkelfelder $\sphericalangle PQR$, $\sphericalangle QRP$, $\sphericalangle PRQ$ heißen INNENWINKELFELDER des Dreiecks.

Definition 4.2:

Jedes Dreieck heißt GLEICHSCHENKLIG, wenn zwei seiner Seiten gleich lang sind; es heißt GLEICHSEITIG, wenn alle drei Seiten gleich lang sind.



gleichschenkliges Dreieck



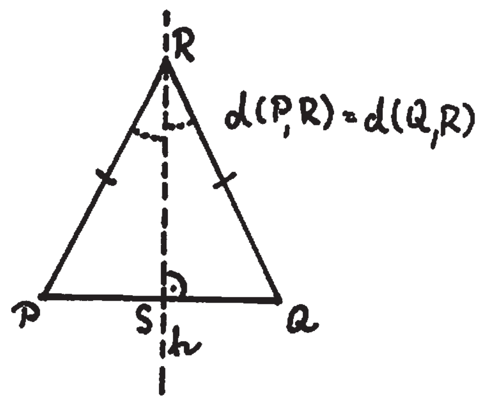
gleichseitiges Dreieck

Satz 4.1:

In jedem gleichschenkligen Dreieck ist die Mittelsenkrechte der dritten Seite eine Winkelhalbierende.

Beweis: Aufgabe

Anleitung: Man betrachte die Achsenspiegelung γ_h an der Mittelsenkrechten h und verwende das Ergebnis aus Aufgabe 3.9 (Seite 3.9), um zu zeigen: $R \in h$

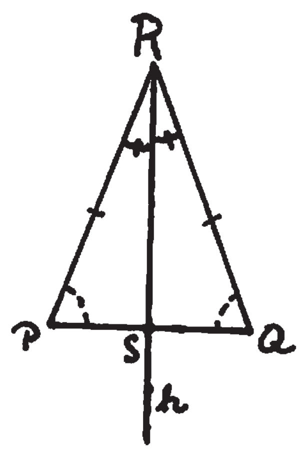


Satz 4.2:

In jedem Dreieck liegen gleich langen Seiten die Scheitel von gleich großen Innenwinkelfeldern gegenüber.

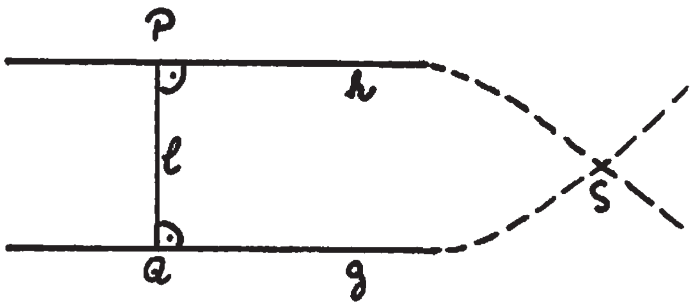
Beweis:

Die Spiegelung γ_h an der Halbierenden h des dritten Innenwinkelfeldes $\sphericalangle PRQ$ bildet die Scheitel P und Q der zu vergleichenden Winkelfelder aufeinander ab und - da S und R Fixpunkte sind - auch die entsprechenden Schenkel. Wegen der Winkelmaßtreue von γ_h ist $\omega(\sphericalangle RPS) = \omega(\sphericalangle RQS)$.



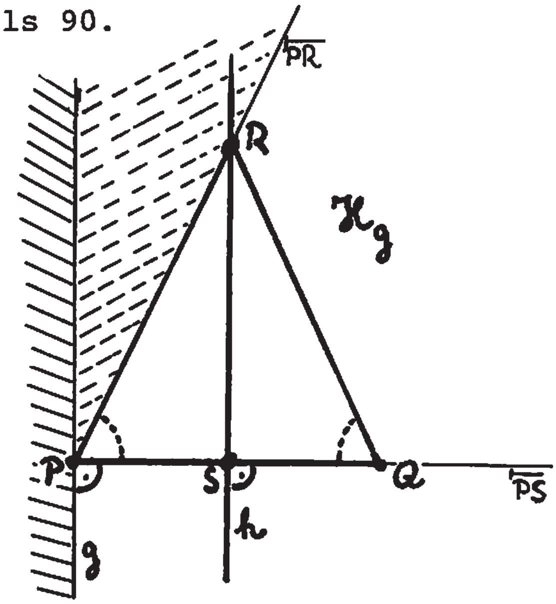
Satz 4.3:
Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt $P \notin g$ gibt es mindestens eine Parallele h zu g, die P enthält.

Beweis:
Von P aus fällen wir das Lot l auf g: $l \cap g = \{Q\}$. In P errichten wir eine Senkrechte h zu l. Dann ist h eine Parallele zu g: Wäre nämlich $h \cap g = \{S\} \neq \emptyset$, so gäbe es von S aus zwei verschiedene Lote g und h auf PQ, was der eindeutigen Bestimmtheit des Lotes widerspricht (siehe dazu Satz 3.2 auf Seite 3.4).

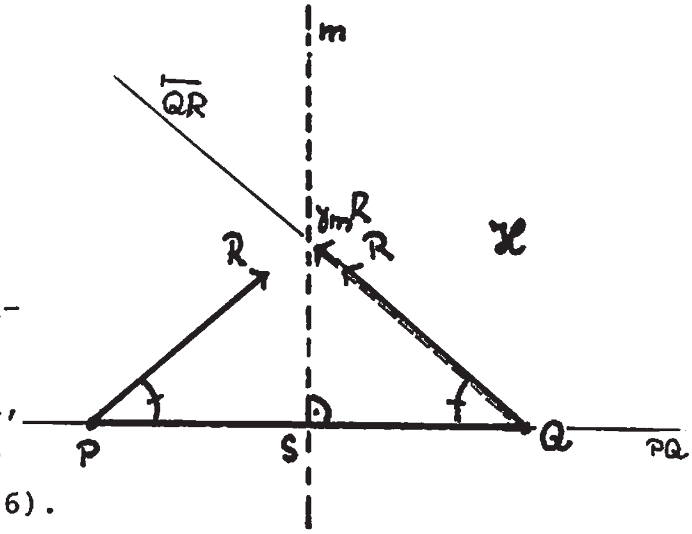


Satz 4.4:
In jedem gleichschenkligen Dreieck ist das Maß der beiden gleich großen Winkelfelder kleiner als 90.

Beweis:
Es sei gemäß nebenstehender Skizze $\omega(\sphericalangle RPS) = \omega(\sphericalangle RQS)$. Durch P legen wir eine Senkrechte g zu PS; diese ist nach obigem Beweis zu Satz 4.3 parallel zur Mittelsenkrechten h der Strecke $\overline{PQ}$. In der Halbebene H_g zu g, in der h liegt, liegen S und R. $\overrightarrow{PS}$ zerlegt das gestreckte Winkelfeld $H_g \cup g$ in zwei Rechtwinkelfelder, und $\overrightarrow{PR}$ zerlegt eines dieser Rechtwinkelfelder nichttrivial. Daher ist $\omega(\sphericalangle RPS) < 90$.



Satz 4.5:
Haben in einem Dreieck zwei Winkelfelder das gleiche Maß, so sind die entsprechenden ("gegenüberliegenden") Seiten gleich lang.



<u>Beweis</u> zu Satz 4.5:
Es sei gemäß nebenstehender Skizze $\omega(\sphericalangle QPR) = \omega(\sphericalangle PQR)$ (*) und m die Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$. $\overline{PQ}$ geht beim Spiegeln an m in sich über, wobei P und Q vertauscht werden und der Mittelpunkt S festbleibt. Die Halbebene $\mathcal{H}$ zu PQ, welche R enthält, wird durch γ_m auf sich abgebildet (siehe Satz 3.4 auf Seite 3.6).
Wegen der Winkelmaßtreue von γ_m gilt:

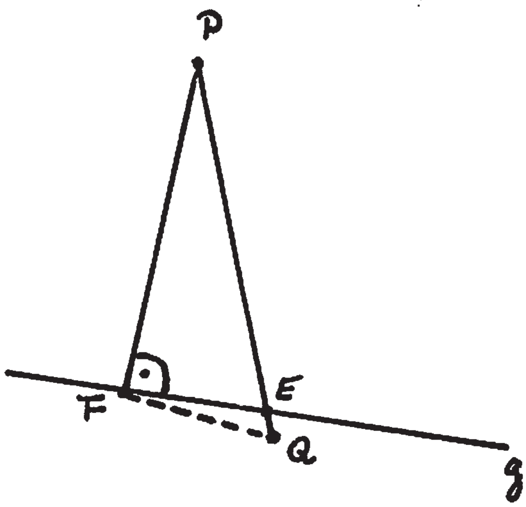
$\omega(\sphericalangle PQ\gamma_m R) = \omega(\sphericalangle \gamma_m Q \gamma_m P \gamma_m R) = \omega(\sphericalangle QPR)$ (**).

Aus (*) und (**) folgt: $\omega(\sphericalangle PQR) = \omega(\sphericalangle PQ\gamma_m R)$.
Die Winkelfelder $\sphericalangle PQR$ und $\sphericalangle PQ\gamma_m R$ sind also beide an $\overrightarrow{QP}$ in $\mathcal{H}$ abgetragen und besitzen das gleiche Winkelmaß.
Damit folgt aus dem Winkelmaßaxiom: $\sphericalangle PQR = \sphericalangle PQ\gamma_m R$ und damit $\gamma_m R \in \overrightarrow{QR}$. Nach dem gleichen Verfahren findet man $\gamma_m R \in \overrightarrow{PR}$, d.h. $\gamma_m R \in \overrightarrow{PR} \cap \overrightarrow{QR} = \{R\}$.

Die Längentreue von γ_m liefert nun:

$$d(Q,R) = d(\gamma_m P, \gamma_m R) = d(P,R) \ .$$

<u>Satz 4.6</u>:
Von allen Entfernungen eines Punktes P zu den Punkten einer Geraden g ist die zum Lotfußpunkt F die kürzeste.



<u>Beweis</u>:
Zu zeigen ist:

$$\bigwedge_{E \in g \setminus \{F\}} d(P,F) < d(P,E)$$

<u>Angenommen</u>: Es gibt einen Punkt $E \in g\setminus\{F\}$ mit $d(P,F) \geq d(P,E)$.

Dann existiert ein Punkt $Q \in \overrightarrow{PE}$ mit $d(P,F) = d(P,Q)$.

Dann ist $\overrightarrow{FE}$ enthalten im Winkelfeld $\sphericalangle PFQ$,

d.h. $\overrightarrow{FE} \subset \sphericalangle PFQ$,

und dieses wird durch $\overrightarrow{FE}$ zerlegt in $\sphericalangle PFE$ und $\sphericalangle EFQ$:

$$\sphericalangle PFQ = \sphericalangle PFE \cup \sphericalangle EFQ \ .$$

Folglich gilt: $\underline{\omega(\sphericalangle PFQ) \geq} \ \omega(\sphericalangle PFE) = \underline{90}$. (*)

Wegen $d(P,F) = d(P,Q)$ sind die Innenwinkelfelder bei F und Q gleich groß (Satz 4.2).
Als gleich große Winkelfelder in einem Dreieck ist nach Satz 4.4 das Winkelmaß für jedes der beiden Winkelfelder kleiner als 90 :

$$\omega(\sphericalangle PQF) = \underline{\omega(\sphericalangle PFQ) < 90} \ .$$

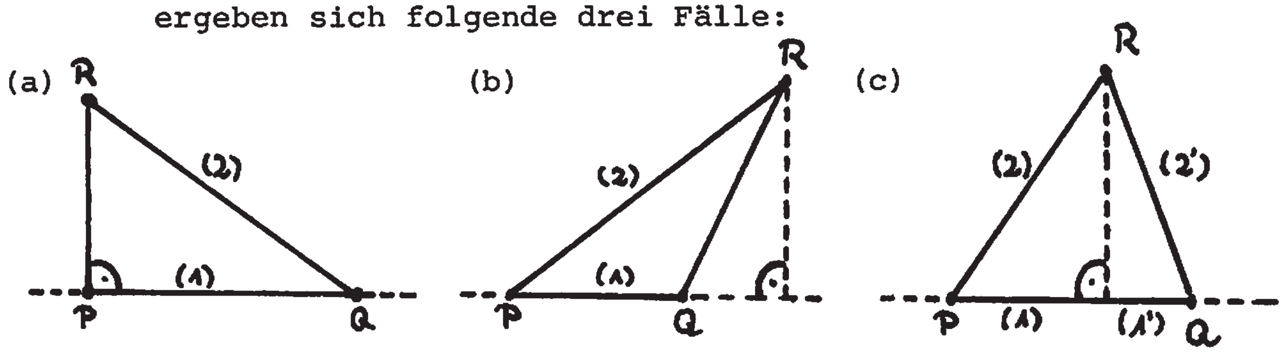
Dies steht jedoch im Widerspruch zu (*).

Satz 4.7:
Für beliebige Punkte $P,Q,R \in E$ gilt:

$$d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q).$$

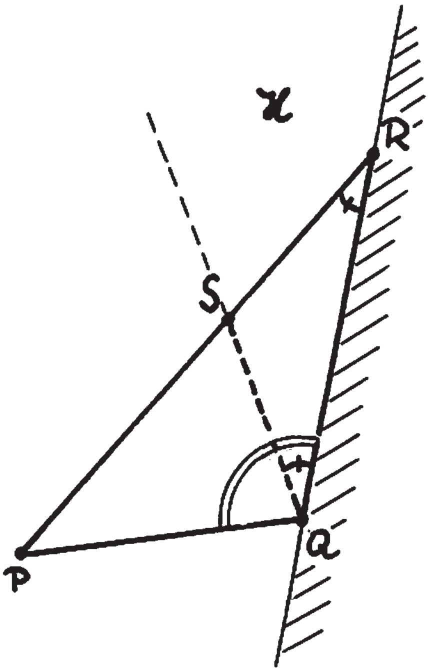
Das Gleichheitszeichen steht nur im Falle $R \in \overline{PQ}$.

Beweis: Aufgabe
Anleit.: Man unterscheide $R \in PQ$ und $R \notin PQ$. Für $R \notin PQ$ ergeben sich folgende drei Fälle:



Mit Hilfe von Satz 4.6 zeige man, daß jeweils Strecke (1) kürzer ist als Strecke (2) und beweise damit die Gültigkeit der Dreiecksungleichung.

Satz 4.8:
In jedem Dreieck liegt dem Scheitel des größeren von zwei Innenwinkelfeldern die längere Seite gegenüber.



Beweis:
Sei $\omega(\sphericalangle PRQ) < \omega(\sphericalangle PQR)$.
Das kleinere Winkelmaß tragen wir an $\overline{QR}$ in die Halbebene $\mathcal{H}$ hinein ab, in der P liegt.
So finden wir $S \in \overline{PR}$.
Dann haben im Dreieck $\{S,Q,R\}$ die Winkelfelder mit den Scheiteln Q und R das gleiche Maß, und es gilt mit Satz 4.5:

$$d(Q,S) = d(R,S).$$

Mit $S \notin \overline{PQ}$, aber $S \in \overline{PR}$ ergibt sich sofort:

$$d(P,Q) < d(P,S)+d(S,Q) = d(P,S)+d(S,R) = d(P,R)$$

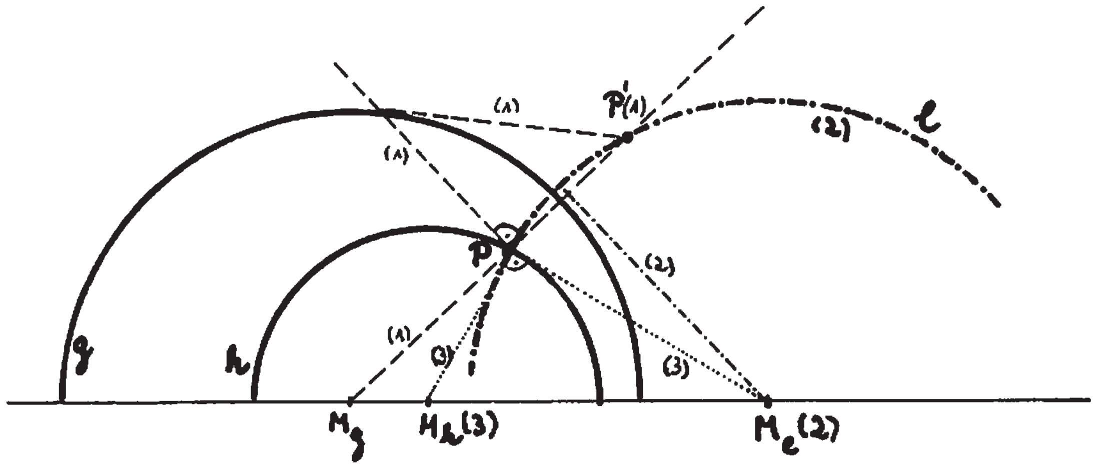
Satz 4.9:
In jedem Dreieck liegt der längeren von zwei Seiten der Scheitel des größeren Innenwinkelfeldes gegenüber.

Beweis: Aufgabe
Anl: Man führe den Beweis indirekt und konstruiere einen Widerspruch zu Satz 4.5 bzw. Satz 4.8.

Aufgabe 4.1: In jedem (echten) Dreieck ist jede Seite länger als der Betrag der Differenz der Längen der beiden anderen Seiten.

Unser bisher entwickeltes Axiomensystem mit den daraus abgeleiteten Sätzen - kurz, die bis hierher entwickelte Geometrie - besitzt (mindestens) zwei Modelle. Das eine haben wir stets zur Illustration der zu beweisenden Aussagen herangezogen, das andere am Ende des 3.Kapitels vorgestellt.
Zum Vergleich demonstrieren wir in beiden Modellen das Auffinden einer Parallelen h zu einer gegebenen Geraden g durch einen nicht auf g befindlichen Punkt P (man vergleiche hierzu Satz 4.3 auf Seite 4.2).

E_N - Modell:



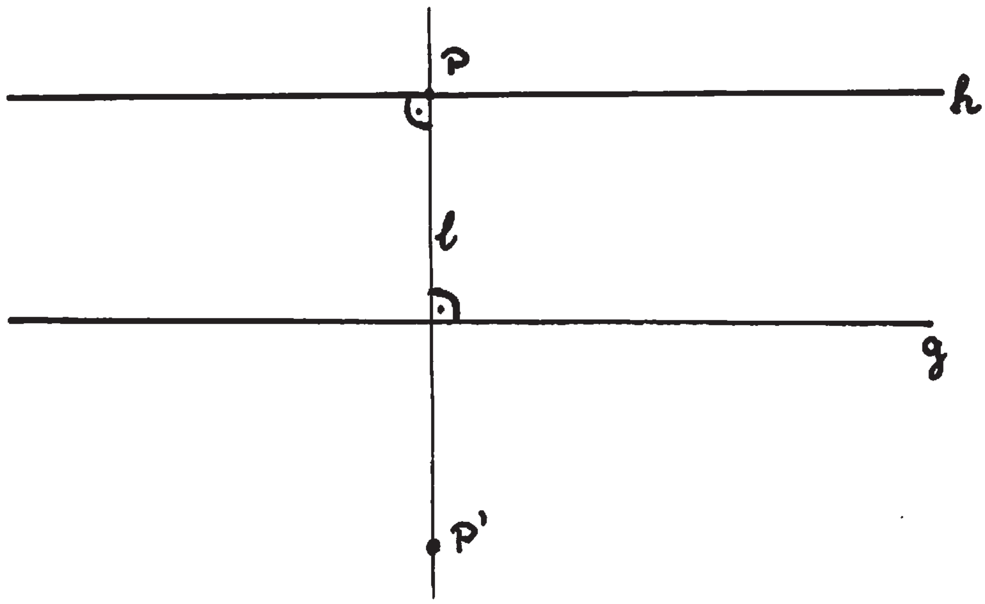
(1) Konstruktion des Spiegelpunktes von P an g: P'

(2) Lot auf g durch P und P': l

(3) Senkrechte zum Lot l in P: h

$h \parallel g$

E - Modell:



Das Lot l durch P und den Spiegelpunkt P' steht senkrecht auf g; die Senkrechte h auf l in P ist Parallele zu g.

Im $\mathcal{E}$-Modell vermuten wir sofort:

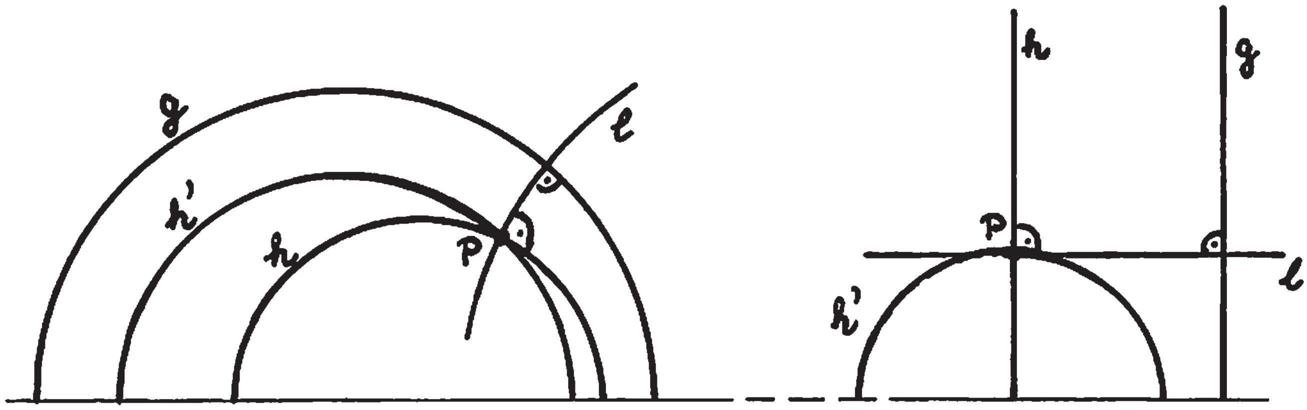
h ist die <u>einzige</u> Parallele zu g durch P.

Diese Tatsache - so plausibel sie erscheint - ist jedoch aus den bisher gegebenen Axiomen I - VIII nicht ableitbar. Schon <u>EUKLID</u> (um 300 v.Chr.) hatte dies erkannt und deshalb in seinem 5.Postulat gefordert:

"Wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, deren Summe kleiner als zwei Rechte ist, dann treffen sich diese beiden Geraden, wenn man sie auf dieser Seite verlängert."

Rund zweitausend Jahre haben die Mathematiker an den Postulatcharakter dieser Aussage nicht geglaubt und versucht, sie als Satz zu beweisen. Dank der Forschungen von <u>LOBATSCHEWSKI</u> (1826) und Johann <u>BOLYAI</u> (1831) wissen wir heute, daß diese Bemühungen ergebnislos bleiben mußten. Den Grund dafür können wir leicht durch eine einfache Betrachtung in dem von Henri <u>POINCARÉ</u> (1854-1912) entwickelten $\mathcal{E}_N$- Modell der Geometrie erkennen:

Im $\mathcal{E}_N$- Modell gelten alle 8 Axiome, die unsere Geometrie beschreiben, also auch alle Sätze, die sich aus diesen Axiomen ableiten lassen. Wäre der Satz ableitbar, daß es durch einen gegebenen Punkt P außerhalb einer gegebenen Geraden g höchstens eine Parallele h zu dieser Geraden g gibt, so müßte das auch in dem $\mathcal{E}_N$- Modell zutreffen.



Unschwer entnimmt man aber der Abbildung auf der Seite 4.7 unten, daß es neben der über das Lot von P auf g konstruierbaren Parallelen durch P eine (und damit beliebig viele) weitere Parallele h' zu g gibt. Euklids Postulat 5 kann daher nicht ableitbar sein.

Ob wir nun beim weiteren Ausbau unserer Geometrie davon ausgehen müssen, daß es zu jeder Geraden durch jeden Punkt ausserhalb dieser Geraden mehrere Parallelen gibt oder ob wir die Tatsache zugrunde legen dürfen, daß es je genau eine solche Parallele gibt, hängt davon ab, was wir axiomatisch fordern, d.h. festlegen.

Die bisher eingeführten Axiome beschreiben die sogenannte ABSOLUTE GEOMETRIE. Ergänzen wir sie durch die Forderung von mindestens zwei Parallelen zu jeder Geraden g durch jeden Punkt $P \notin g$, so gelangen wir zu einer NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE; verbieten wir auf irgendeine Weise die Existenz von mehr als einer solchen Parallelen, so definieren wir die sogenannte EUKLIDISCHE GEOMETRIE. Wir entscheiden uns für den zuletzt genannten Weg.

In dem durchgeführten Aufbau der Geometrie kommt Abbildungen eine große Bedeutung zu. Zuletzt haben wir die STRECKUNGEN

$$\sigma : E \dashrightarrow E$$

mit dem Zentrum $Z \in E$ und dem Streckfaktor $k \neq 0$ durch

(1) $\bigwedge_{P \in E} d(Z,\sigma P) = |k| \cdot d(Z,P)$

(2) $\bigwedge_{P \in E \setminus \{Z\}} \left[k > 0 \rightarrow \sigma P \in \overset{+}{ZP} \wedge k < 0 \rightarrow \sigma P \in ZP \setminus \overset{+}{ZP} \right]$

eingeführt.
Jetzt wird zusätzlich verlangt:

AXIOM IX (STRECKUNGSAXIOM):

Jede Streckung ist eine Ähnlichkeitsabbildung.

Das Streckungsaxiom setzt uns in die Lage, grundlegende Aussagen über die Parallelität von Geraden zu begründen.

Satz 4.10:
Jede Streckung $\sigma: E \dashrightarrow E$ bildet jede Gerade g auf eine zu g parallele Gerade σg ab.

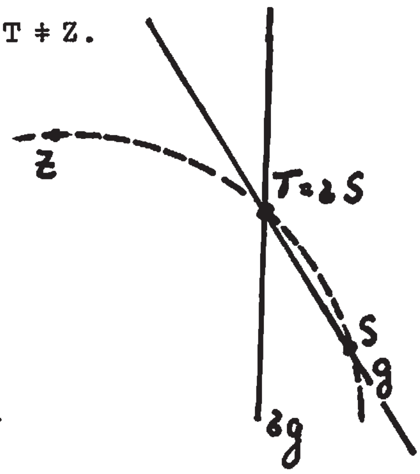
Beweis:
Als zu g ähnliches Bild ist σg eine Gerade (Folgerung aus Axiom IX).

1.Fall: σ sei die Identität. Dann ist $\sigma g = g$ und damit $\sigma g \parallel g$.

2.Fall: σ sei nicht die Identität. Dann hat σ genau den Fixpunkt Z.

a) $Z \in g$: Dann gilt für alle $P \in g$: $\sigma P \in g$; die Bildgerade geht durch mindestens zwei Punkte von g und fällt infolge dessen mit g zusammen.

b) $Z \notin g$: Im Falle $\sigma g \cap g = \emptyset$ ist nichts zu beweisen. Sei $\{T\} \subset \sigma g \cap g$. Dann ist $T \neq Z$. T ist das Bild eines Punktes $S \in g$: $T = \sigma S \wedge S \neq Z$. Infolge dessen liegt T auf der Geraden durch S und Z. Es ist also: $SZ = ST = g$ und damit im Widerspruch zur Voraussetzung: $Z \in g$.



Satz 4.11:
Ist σ eine Streckung mit Streckfaktor k, so gilt:

$$\bigwedge_{P,Q \in E} d(\sigma P, \sigma Q) = |k| \cdot d(P,Q).$$

Beweis:
Da σ eine Ähnlichkeitsabbildung ist, gibt es nach Definition 3.2(2) eine reelle Zahl $c > 0$, so daß gilt:

$$d(Z,\sigma Q) = d(\sigma Z, \sigma Q) = c \cdot d(Z,Q) \quad \text{für} \quad Q \neq Z.$$

Da σ eine Streckung ist, gilt auch $d(Z,\sigma Q) = |k| \cdot d(Z,Q)$

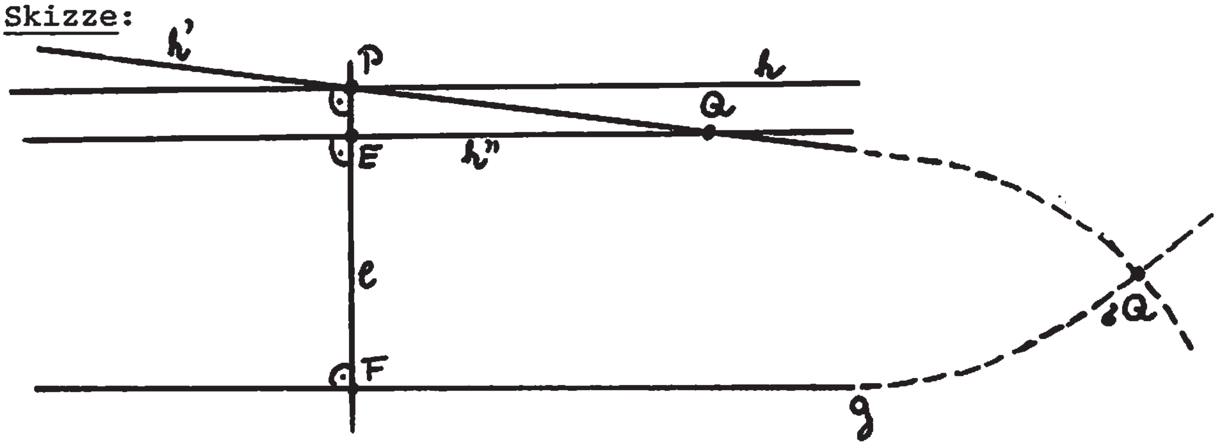
Ein Vergleich ergibt: $c = |k|$.

Satz 4.12: (EUKLIDS PARALLELENAUSSAGE)

Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt $P \notin g$ gibt es höchstens eine Parallele h zu g durch P.

Beweis:
Sei h die mittels des Lotes l konstruierte Parallele zu g durch P. h' sei eine zweite Parallele durch P. Man wähle $Q \in h'$ mit $Q \notin h$. Dann fälle man das Lot h'' von Q auf l (Fußpunkt sei E).

Skizze:



Es ist $E \neq P$, denn andernfalls wäre $h'' = h$ wegen der Eindeutigkeit der Senkrechten, und es wäre $Q \in h$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
Man wähle nun P zum Zentrum einer Streckung σ, welche E in F überführt (der Streckfaktor k ergibt sich aus der Bedingung:

$$d(P,\sigma E) = d(P,F) = |k| \cdot d(P,E)$$

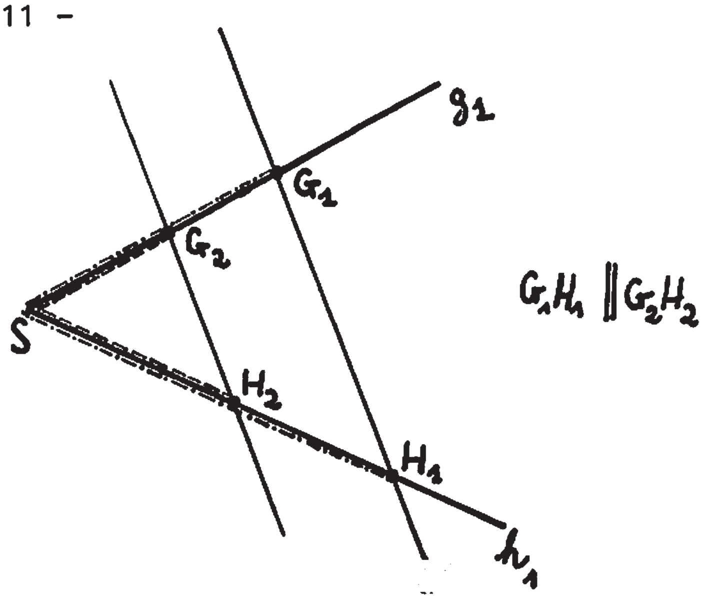
unter Berücksichtigung, ob E und F auf derselben oder auf verschiedenen Halbgeraden von l zu P liegen).
Da σ das Lot l auf sich abbildet (und E auf F) und da σ winkeltreu ist, ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Senkrechten zu l in F:

$$\sigma h'' = g \quad \text{und} \quad \underline{\sigma Q \in g} \,.$$

Andererseits ist nach Definition der Streckung: $\underline{\sigma Q \in h'}$.
Damit ist aber $\sigma Q \in h' \cap g$. Dies steht im Widerspruch zur Parallelität von h' und g, d.h. zu $\underline{h' \cap g = \emptyset}$.
(Denn der Fall $h' = g$ scheidet wegen $P \notin g$ aus).

Satz 4.13 (1.STRAHLENSATZ):

Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Scheitel S von Parallelen außerhalb von S geschnitten, so verhalten sich die Maße der vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf dem einen Strahl wie die Maße der entsprechenden Strecken auf dem anderen Strahl.

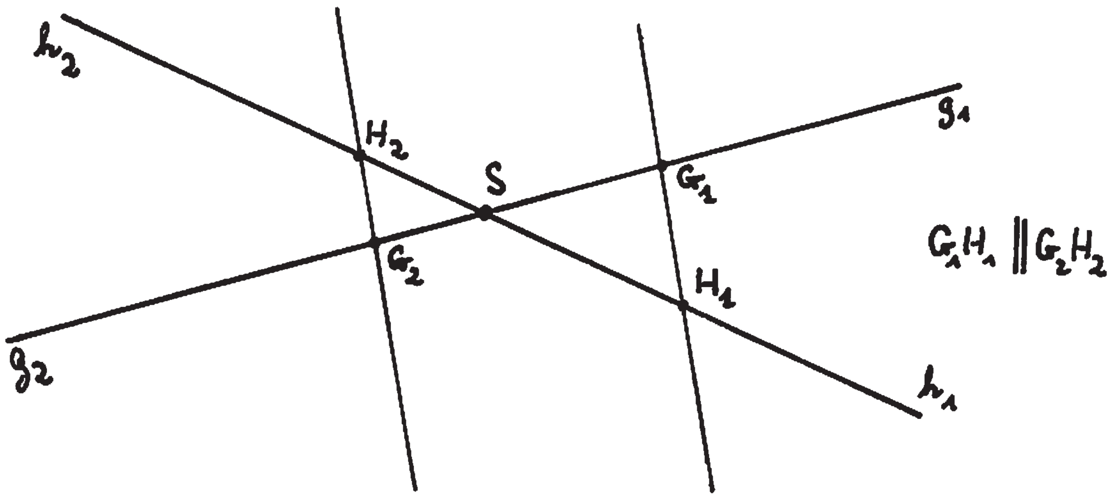


Beweis:

Voraussetzung: $G_1H_1 \parallel G_2H_2$ und $S \notin G_iH_i$ $(i=1,2)$.
S wird zum Zentrum einer Streckung σ mit $k>0$ gewählt, die G_1 auf G_2 abbildet: $d(S,G_2) = k \cdot d(S,G_1)$.
Behauptung: Es ist $d(S,H_2) = k \cdot d(S,H_1)$.
Dazu ist $\sigma H_1 = H_2$ nachzuweisen:
$\sigma(G_1H_1)$ ist eine Parallele zu G_1H_1 durch G_2 und fällt infolge dessen mit G_2H_2 zusammen (Satz 4.12). Speziell gilt $\sigma H_1 \in G_2H_2$. Wegen $k>0$ ist ferner $\sigma H_1 \in h_1$.
Daraus folgt: $\sigma H_1 \in h_1 \cap G_2H_2 = \{H_2\}$. Also: $\sigma H_1 = H_2$.
Zusammenfassung:

$$k = \frac{d(S,H_2)}{d(S,H_1)} = \frac{d(S,G_2)}{d(S,G_1)} \quad .$$

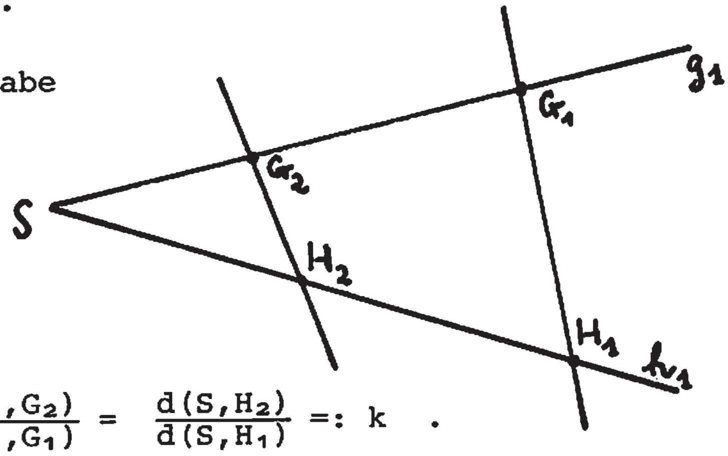
Bemerkung: Der 1.Strahlensatz gilt auch, wenn die 4 Schnittpunkte mit den beiden Parallelen auf 4 verschiedenen Strahlen von zwei sich schneidenden Geraden liegen (s.Abb.unten). In diesem Fall ist der Streckfaktor von σ negativ: $k<0$.



Satz 4.14 (Umkehrung des 1.Strahlensatzes):

Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Scheitel S von zwei Geraden nicht in S geschnitten und verhalten sich die Maße der vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf dem einen Strahl wie die Maße der entsprechenden Strecken auf dem anderen Strahl, dann sind die beiden Geraden zueinander parallel.

Beweis: Aufgabe



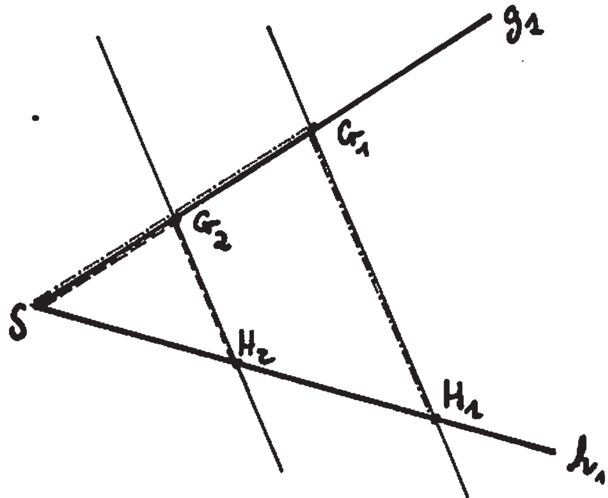
Ansatz: $\frac{d(S,G_2)}{d(S,G_1)} = \frac{d(S,H_2)}{d(S,H_1)} =: k$.

Satz 4.15: (2.STRAHLENSATZ)

Werden zwei Strahlen g_1 und h_1 mit gemeinsamem Scheitel S von zwei Parallelen außerhalb S geschnitten, so verhalten sich die Längen der vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf einem Strahl wie die Längen der entsprechenden Strecken auf den Parallelen.

Beweis:

Zu zeigen ist: $\frac{d(S,G_2)}{d(S,G_1)} = \frac{d(G_2,H_2)}{d(G_1,H_1)}$.

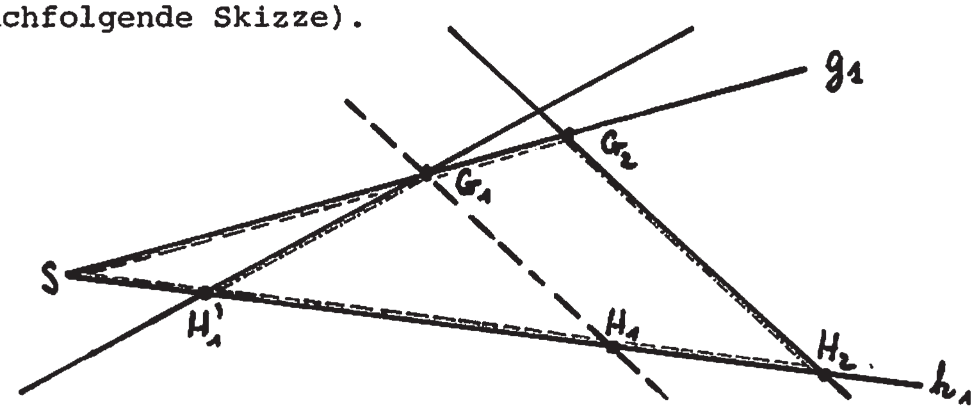


1. Es sei $k > 0$ der Streckfaktor zur Streckung σ mit dem Zentrum S und $\sigma G_1 = G_2$.
2. Die Streckung σ führt H_1 in einen Punkt auf h_1 und zugleich in einen Punkt auf der Parallelen zu H_1G_1 durch G_2 über; das ist aber H_2 (Beweis des 1.Strahlensatzes).
3. Es ist demnach $\sigma\overline{G_1H_1} = \overline{G_2H_2}$ und $\sigma\overline{SG_1} = \overline{SG_2}$, da S Fixpunkt ist.

4. Da Streckungen Ähnlichkeitsabbildungen mit dem Längenverhältnis $|k|$ sind, ergibt sich die Behauptung:

$$|k| = \frac{d(G_2,H_2)}{d(G_1,H_1)} = \frac{d(S,G_2)}{d(S,G_1)} \quad .$$

<u>Bemerkung</u>: Der 2.Strahlensatz ist nicht umkehrbar (siehe nachfolgende Skizze).



Zwar gilt: $\frac{d(S,G_2)}{d(S,G_1)} = \frac{d(G_2,H_2)}{d(G\ ,H_1')}$, aber nicht $G_1H_1' \parallel G_2H_2$!

<u>Aufgabe 4.2</u>: Zwei Halbgeraden g_1 und h_1 mit gemeinsamem Anfangspunkt S werden von Parallelen in G_1 und H_1 bzw. G_2 und H_2 geschnitten. Es sei $S \notin G_1H_1$ und $S \notin G_2H_2$. Man beweise:

Aus $$\frac{d(S,G_2)}{d(S,G_1)} = \frac{d(S,H_2)}{d(S,H_1)} \qquad (0)$$

folgt $$\frac{d(S,G_2)}{d(G_1,G_2)} = \frac{d(S,H_2)}{d(H_1,H_2)} \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \frac{d(G_1,S)}{d(G_1,G_2)} = \frac{d(H_1,S)}{d(H_1,H_2)} \quad (2)$$

<u>Satz 4.16 (SATZ VON MENELAOS*)</u>:

Eine Gerade schneide die drei Seiten eines Dreiecks echt innen oder außen. Bildet man zyklisch die Quotienten der Längen der Strecken, in die die Seiten zerlegt werden und multipliziert man die drei Quotienten, so ist der Wert 1 .

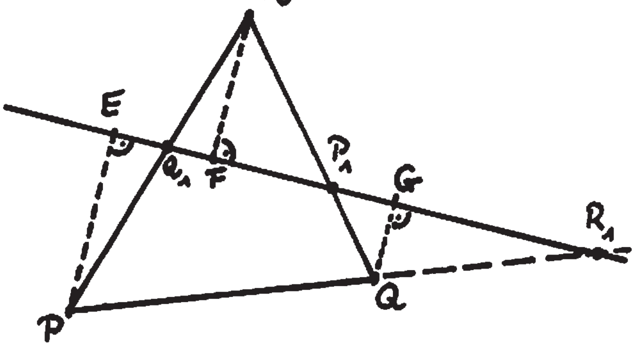
<u>Beweis</u>:

Von den Ecken des Dreiecks werden Lote auf die schneidende Gerade gefällt. Seien die entsprechenden Lotfußpunkte mit E,F und G bezeichnet (siehe Skizze auf S.4.14 oben)

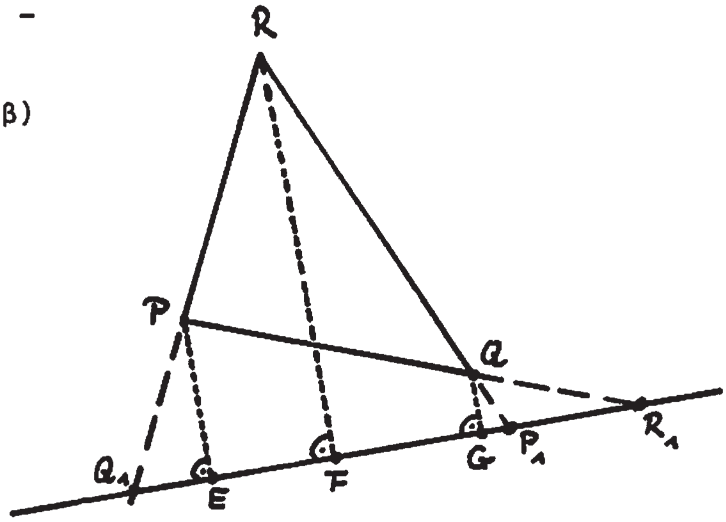
---

*) um 100 v.Chr.

α)



β)



Dann gilt mit dem zweiten Strahlensatz (sowohl für Fall α als auch für Fall β):

$$\frac{d(P,R_1)}{d(R_1,Q)} = \frac{d(P,E)}{d(Q,G)} \quad (1) \quad , \quad \frac{d(Q,P_1)}{d(P_1,R)} = \frac{d(Q,G)}{d(R,F)} \quad (2) \quad \text{und}$$

$$\frac{d(R,Q_1)}{d(Q_1,P)} = \frac{d(R,F)}{d(P,E)} \quad (3) \quad .$$

Multipliziert man die linken und die rechten Seiten von (1) bis (3) miteinander, so folgt:

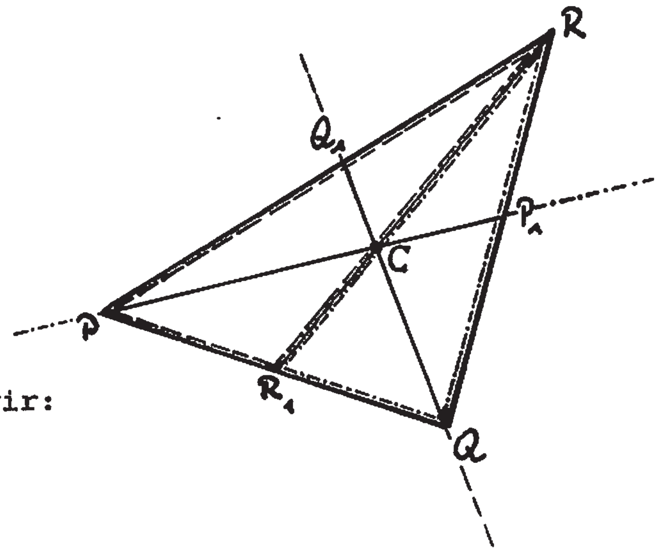
$$\frac{d(P,R_1)}{d(R_1,Q)} \cdot \frac{d(Q,P_1)}{d(P_1,R)} \cdot \frac{d(R,Q_1)}{d(Q_1,P)} = 1 \ .$$

Satz 4.17 (SATZ VON CEVA*):

Gegeben sei durch jede Ecke eines Dreiecks eine Gerade, die die gegenüberliegende Seite echt innen oder außen schneidet. Gehen die drei Geraden durch einen gemeinsamen Schnittpunkt und bildet man zyklisch die Quotienten der Längen der Strecken, in die die Seiten zerlegt werden, so hat das Produkt der drei Quotienten den Wert 1.

Beweis:

Wir wenden zweimal den Satz von MENELAOS an, und zwar auf das Teildreieck $\{P,R,R_1\}$ mit der schneidenden Geraden QQ_1 und auf das Teildreieck $\{R_1,R,Q\}$ mit der schneidenen Geraden PP_1. Dann erhalten wir:



---

*) 1647 - 1734

$$\frac{d(R,Q_1)}{d(Q_1,P)} \cdot \frac{d(P,Q)}{d(Q,R_1)} \cdot \frac{d(R_1,C)}{d(C,R)} = 1 \qquad \text{und}$$

$$\frac{d(R,C)}{d(C,R_1)} \cdot \frac{d(R_1,P)}{d(P,Q)} \cdot \frac{d(Q,P_1)}{d(P_1,R)} = 1 \quad .$$

Durch Multiplikation der jeweils rechten und linken Seiten ergibt sich sofort:

$$\frac{d(R,Q_1)}{d(Q_1,P)} \cdot \frac{d(P,R_1)}{d(R_1,Q)} \cdot \frac{d(Q,P_1)}{d(P_1,R)} = 1 \, .$$

Bemerkung: Bei unserem Beweis des Satzes von CEVA setzten wir stillschweigend voraus, daß der Cevapunkt im Inneren des Dreiecks liegt.

Aufgabe 4.3: Man führe den Beweis für den Satz von CEVA unter der Voraussetzung, daß der Cevapunkt außerhalb des Dreiecks liegt.

Satz 4.18 (Umkehrung des Satzes von CEVA):

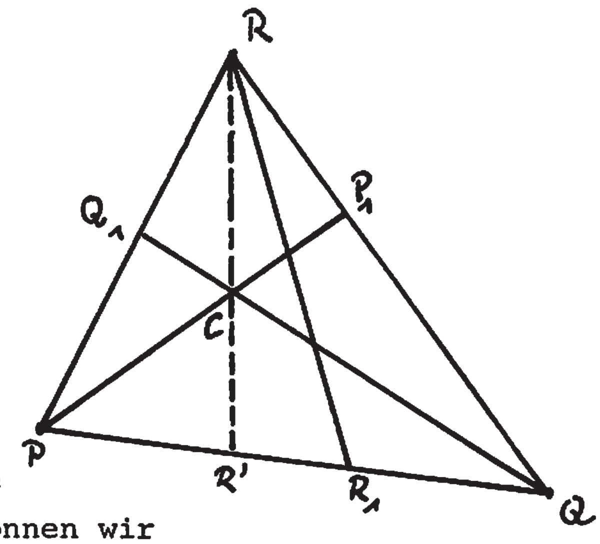
Gegeben seien durch jede Ecke eines Dreiecks eine Gerade, die die gegenüberliegende Seite echt innen schneidet*) . Bildet man zyklisch die Quotienten der Längen der Strecken, in die die Seiten zerlegt werden und hat das Produkt der drei Quotienten den Wert 1 , so gehen die drei schneidenden Geraden durch einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Beweis:

Die drei Geraden seien PP_1, QQ_1 und RR_1.

Nach Voraussetzung gilt:

$$\frac{d(P,R_1)}{d(R_1,Q)} \cdot \frac{d(Q,P_1)}{d(P_1,R)} \cdot \frac{d(R,Q_1)}{d(Q_1,P)} = 1$$



Zwei der Geraden - sagen wir PP_1 und QQ_1 - schneiden sich sicher in einem Punkt C im Inneren des Dreiecks (warum?). Geht die dritte Gerade RR_1 nicht durch C, dann können wir durch R und C eine Gerade legen, die $\overline{PQ}$ in einem weiteren

---

*) oder zwei Seiten werden außen und die dritte echt innen geschnitten.

Punkt R' innen trifft. Nach dem Satz von CEVA gilt:

$$\frac{d(P,R')}{d(R',Q)} \cdot \frac{d(Q,P_1)}{d(P_1,R)} \cdot \frac{d(R,Q_1)}{d(Q_1,P)} = 1$$

Ein Vergleich mit der Voraussetzung liefert:

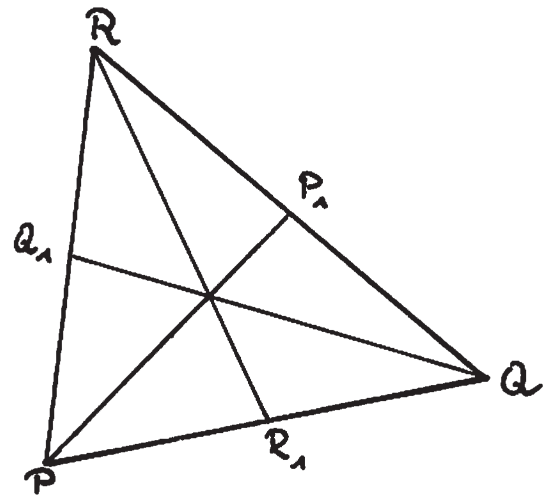
$$\frac{d(P,R')}{d(R',Q)} = \frac{d(P,R_1)}{d(R_1,Q)} \quad .$$

Das ist aber für $\{R',R_1\} \subset \overline{PQ}$ unmöglich, wenn man $R' \neq R_1$ voraussetzt. Demnach ist $RR_1 = RR'$ und somit $C \in RR_1$.

Definition 4.3:
Jede Gerade durch eine Ecke und durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite eines Dreiecks heißt SEITENHALBIERENDE.

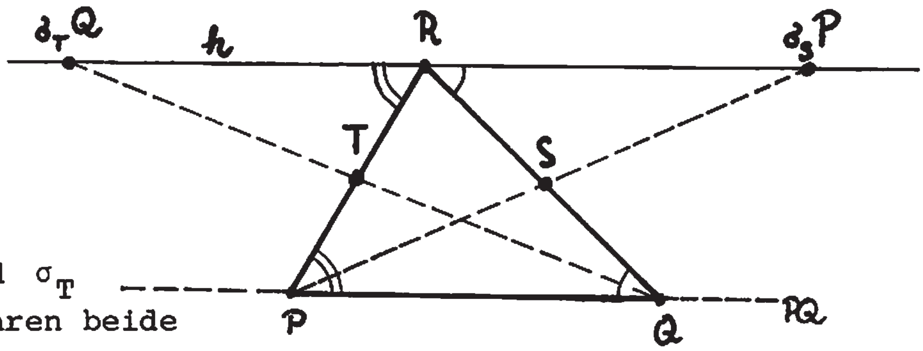
Satz 4.19:
In jedem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt.

Beweis: Aufgabe



Satz 4.20:
In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkelmaße 180.

Beweis:
T halbiere gemäß nebenstehender Abb. die Strecke $\overline{PR}$ und S halbiere $\overline{RQ}$. Die Punktspiegelungen σ_S mit dem Zentrum S und σ_T mit dem Zentrum T führen beide



als Streckungen mit dem Streckfaktor $k=-1$ die Gerade PQ in die nach Satz 4.12 eindeutig bestimmte Parallele h durch R über, und es gilt: $\sigma_S Q = \sigma_T P = R$, $\sigma_S R = Q$, $\sigma_T R = P$. Wegen der Winkelfeld- und Winkelmaßtreue der Streckungen ist:

$$\left.\begin{aligned} \omega(\measuredangle RQP) &= \omega(\measuredangle \sigma_S R \sigma_S Q \sigma_S P) = \omega(\measuredangle QR\sigma_S P) \\ \omega(\measuredangle QPR) &= \omega(\measuredangle \sigma_T Q \sigma_T P \sigma_T R) = \omega(\measuredangle \sigma_T Q\, RP) \end{aligned}\right\} (*)$$

Wegen $\{\sigma_T Q, \sigma_S P\} \subset h$ und $R \in \overline{\sigma_T Q \sigma_S P}$ gilt:

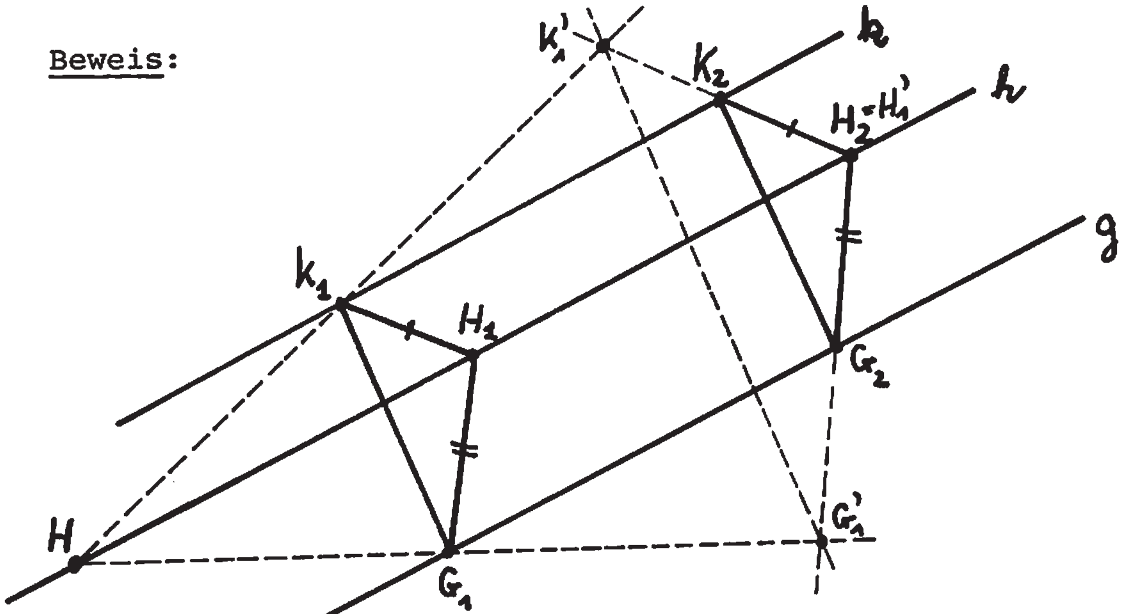
$$\begin{aligned} 180 &= \omega(\measuredangle \sigma_T Q\, R\, \sigma_S P) \\ &= \omega(\measuredangle \sigma_T Q\, R P) + \omega(\measuredangle PRQ) + \omega(\measuredangle QR\sigma_S P) \\ &\overset{(*)}{=} \omega(\measuredangle QRP) + \omega(\measuredangle PRQ) + \omega(\measuredangle RQP)\,, \end{aligned}$$

das ist aber die Summe der Winkelmaße der Innenwinkelfelder im Dreieck.

Satz 4.21 (Kleiner Satz von DESARGUES*):

Auf drei paarweise verschiedenen parallelen Geraden liegen die Ecken von zwei Dreiecken. Sind zwei Paare entsprechender Seiten parallel, so auch die dritten Seiten.

Beweis:



Voraussetzung: $k \parallel h \parallel g$, $K_1H_1 \parallel K_2H_2$, $G_1H_1 \parallel G_2H_2$

Behauptung: $K_1G_1 \parallel K_2G_2$

Durchführung:

(a) Wir wählen eine Streckung σ mit dem Zentrum H $(H \notin \overline{H_1H_2})$, die H_1 in H_2 überführt: $\sigma H_1 = H_2$.

---
*) 1591 - 1661

Dabei geht H_1G_1 in die parallele Gerade H_2G_2 und H_1K_1 in die parallele Gerade H_2K_2 über. Auf den Parallelen liegen die Bilder G_1' von G_1 und K_1' von K_1.

(b) Die Gerade $G_1'K_1'$ ist das Bild der Geraden G_1K_1 unter der Streckung σ. Nach dem Satz 4.10 gilt daher $G_1'K_1' \parallel G_1K_1$.

(c) Da Geraden durch das Streckzentrum H auf sich abgebildet werden, liegt das Bild K_1' von K_1 auf HK_1 und das Bild G_1' von G_1 auf HG_1. Es gilt also mit (a): $\{K_1'\} = HK_1 \cap H_2K_2$ und $\{G_1'\} = HG_1 \cap H_2G_2$.

(d) Durch Anwendungen des 1.Strahlensatzes (Satz 4.13) ergibt sich nun mittels Satz 4.14: $G_1'K_1' \parallel G_2K_2$:
Bezogen auf den Scheitel K_1' und die Parallelen k und h besagt der 1.Strahlensatz:

$$\frac{d(K_1',K_1)}{d(K_1',H)} = \frac{d(K_1',K_2)}{d(K_1',H_2)} \qquad (1)$$

Bezogen auf den Scheitel G_1' und die Parallelen g und h besagt der 1.Strahlensatz:

$$\frac{d(G_1',G_1)}{d(G_1',H)} = \frac{d(G_1',G_2)}{d(G_1',H_2)} \qquad (2)$$

Aus (1) folgt: $$1 - \frac{d(K_1',K_1)}{d(K_1',H)} = 1 - \frac{d(K_1',K_2)}{d(K_1',H_2)}$$

und damit: $$\frac{d(H,K_1)}{d(H,K_1')} = \frac{d(H_2,K_2)}{d(H_2,K_1')} \qquad (3)$$

Aus (2) folgt: $$1 - \frac{d(G_1',G_1)}{d(G_1',H)} = 1 - \frac{d(G_1',G_2)}{d(G_1',H_2)}$$

und damit: $$\frac{d(H,G_1)}{d(H,G_1')} = \frac{d(H_2,G_2)}{d(H_2,G_1')} \qquad (4)$$

Da die Streckung σ den Punkt K_1 in K_1' und den Punkt G_1 in G_1' überführt, ist:

$$\frac{d(H,G_1)}{d(H,G_1')} = \frac{d(H,K_1)}{d(H,K_1')}$$

Damit ergibt sich über (3) und (4) :

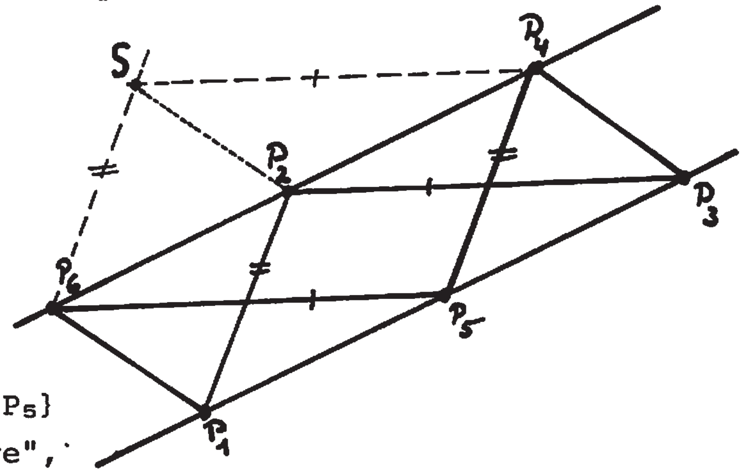
$$\frac{d(H_2,G_2)}{d(H_2,G_1')} = \frac{d(H_2,K_2)}{d(H_2,K_1')}$$

Nach der Umkehrung des 1.Strahlensatzes (Satz 4.14) erhalten wir somit: $G_1'K_1' \parallel G_2K_2$.
Zusammen mit (b) und der Transitivität von $\parallel$ folgt zuletzt: $G_1K_1 \parallel G_2K_2$.

Aufgabe 4.4: Man beweise die Transitivität der Parallel-Relation $\parallel$ in einer Menge von Geraden.

Satz 4.22 (Kleiner Satz von PAPPUS*):

Liegen die Ecken eines Sechsecks[1] abwechselnd auf zwei zueinander parallelen Geraden und gibt es zwei Paare einander gegenüberliegender paralleler Seiten, so sind auch die Seiten des 3.Paares zueinander parallel.



Beweis:
Zu jedem nach Voraussetzung parallelen Paar von Seiten ($P_1P_2 \parallel P_4P_5$ und $P_2P_3 \parallel P_5P_6$) wird eine dritte Parallele (durch P_6 bzw. P_4) gewählt.
Dann sind die Dreiecke $\{P_3,P_4,P_5\}$ und $\{P_2,S,P_6\}$ in "Desargueslage", also ist: $P_3P_4 \parallel P_2S$.
Auch die Dreiecke $\{S,P_2,P_4\}$ und $\{P_6,P_1,P_5\}$ befinden sich in "Desargueslage"; hier folgt: $P_2S \parallel P_1P_6$.
Die Transitivität von $\parallel$ führt zur Behauptung: $P_3P_4 \parallel P_1P_6$.

Definition 4.4:
Sind P, Q, R Punkte auf einer Geraden, so heißt die Zahl $\frac{d(P,R)}{d(R,Q)}$ das TEILVERHÄLTNIS der drei Punkte (in dieser Reihenfolge), und die Strecke $\overline{PQ}$ heißt durch R in diesem Verhältnis geteilt.

Bemerkung 4.1:
Der Teilpunkt R muß nicht auf der Strecke $\overline{PQ}$ liegen (äußere Teilung).

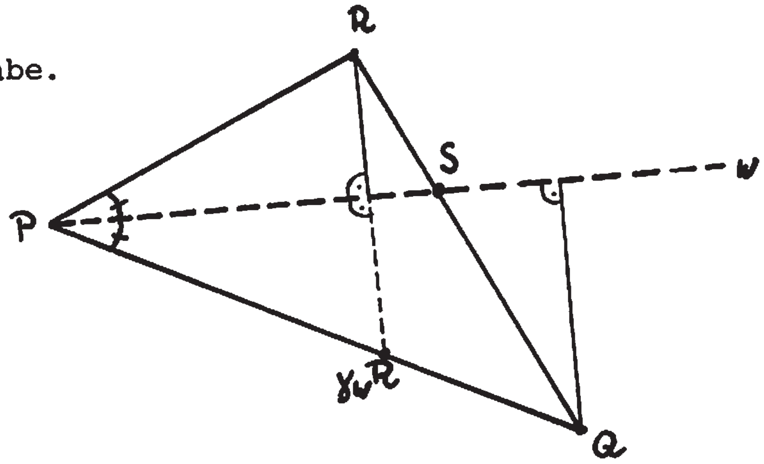
Satz 4.23:
Die Halbierende eines Innenwinkelfeldes eines Dreiecks teilt die dem Scheitel gegenüberliegende Seite im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten.

---

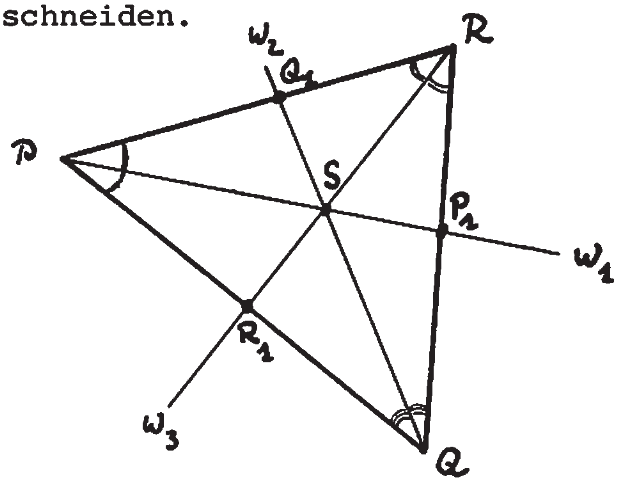
*) um 300 n.Chr. in Alexandria

[1]) das ist ein geschlossener Sechskantenzug

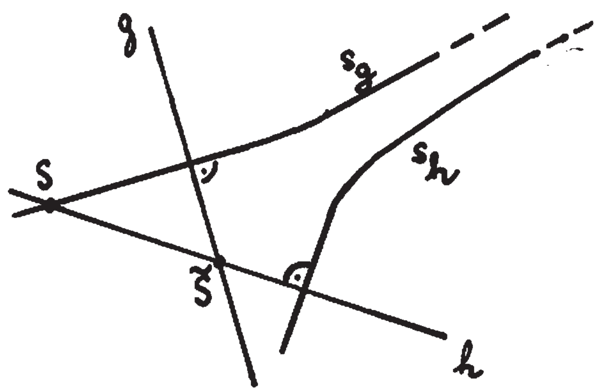
Beweis zu Satz 4.23: Aufgabe.
Anleitung: Man fälle von den Endpunkten der Seite das Lot auf die Winkelhalbierende, spiegele an der Winkelhalbierenden und wende zweimal einen Strahlensatz an.



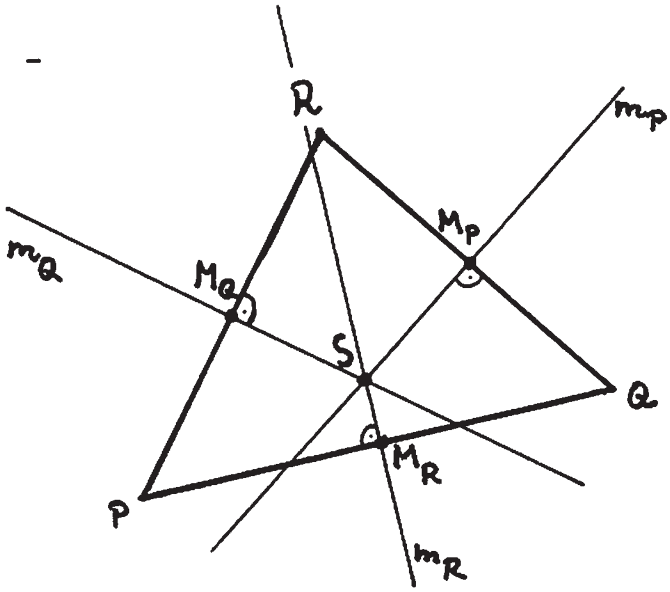
Aufgabe 4.5: Man zeige unter Verwendung von Satz 4.23, daß die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden.
Skizze:



Aufgabe 4.6: Man beweise: Wenn sich zwei Geraden g und h schneiden, dann schneiden sich auch zwei beliebige Senkrechte s_g und s_h zu ihnen.
Hinweis: Man führe einen indirekten Beweis und mache hierbei die Fallunterscheidung $s_g = s_h$ und $s_g \cap s_h = \emptyset$.



Satz 4.24:
In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt.



Beweis: Aufgabe

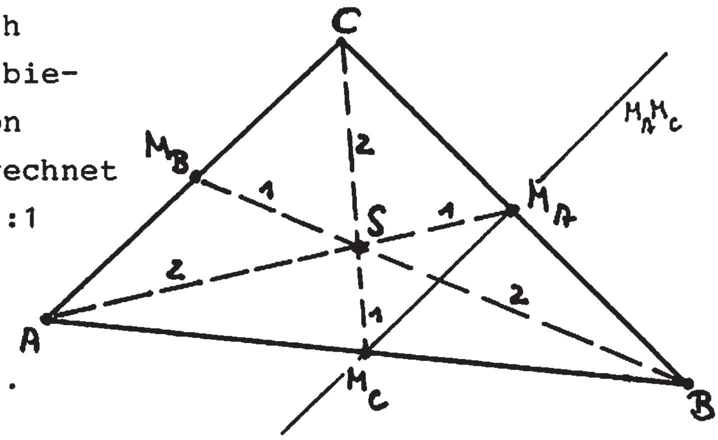
Anleitung: Man verwende Aufgabe 4.8 und die Resultate der Aufgaben 3.8 und 3.9 .

Aufgabe 4.7: Man zeige:

Die drei Seitenhalbierendenabschnitte im Inneren eines Dreiecks $\{A,B,C\}$ werden durch den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden so geteilt, daß sich von den Ecken des Dreiecks aus gerechnet die Längen der Strecken wie 2:1 verhalten.

Es ist also zu zeigen:

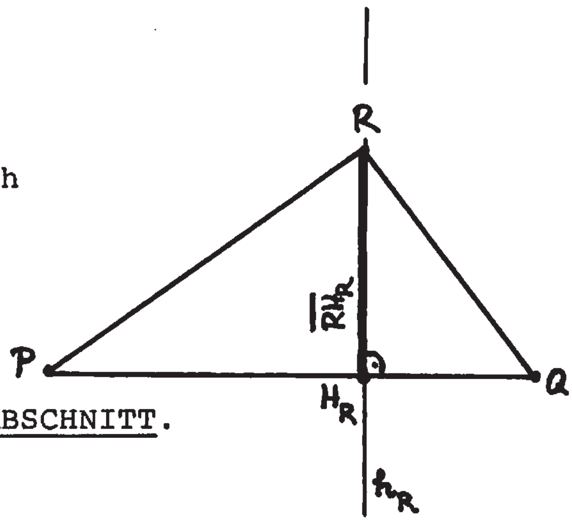
$$\frac{d(A,S)}{d(S,M_A)} = \frac{d(B,S)}{d(S,M_B)} = \frac{d(C,S)}{d(S,M_C)} = \frac{2}{1} .$$



Hinweis: Man verbinde zwei der Seitenmittelpunkte durch eine Gerade und wende Strahlensätze an.

Definition 4.5:

In jedem Dreieck heißt das Lot durch eine Ecke auf die durch die beiden anderen Ecken bestimmte Gerade eine HÖHE. Die durch die genannte Ecke und den Lotfußpunkt bestimmte Strecke nennen wir HÖHENABSCHNITT.



Satz 4.25:

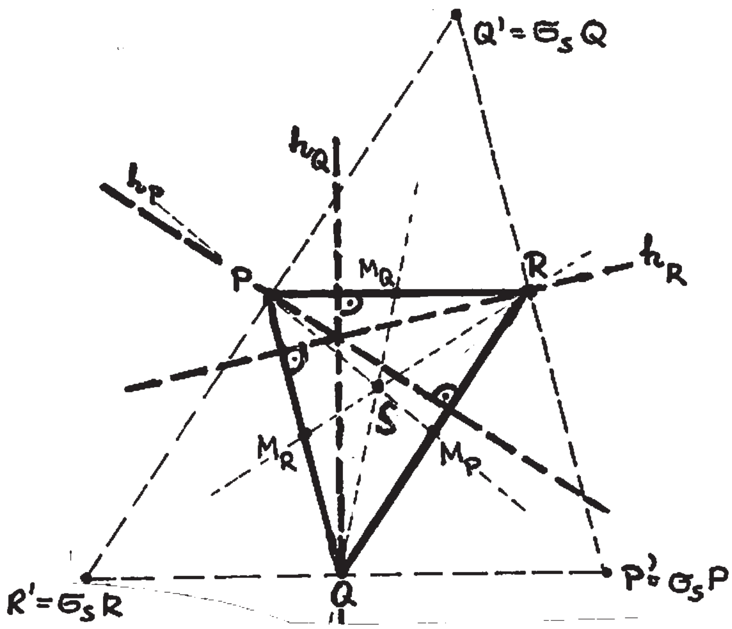
In jedem Dreieck schneiden sich die drei Höhen in einem Punkt.

Beweis: Aufgabe

Anl.: siehe nächste Seite !

Anleitung zum Beweis von Satz 4.25:

Sei $\{P,Q,R\}$ das gegebene Dreieck und S der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden PM_P, QM_Q, RM_R. Dann bilde man das Dreieck $\{P,Q,R\}$ durch die Streckung σ_S mit dem Streckzentrum S und dem Streckfaktor $k = -2$ ab und zeige unter Verwendung von Aufgabe 4.9: Im Bilddreieck $\{P',Q',R'\}$ sind die drei Höhen h_P, h_Q und h_R des Ausgangsdreiecks gerade die Mittelsenkrechten, d.h. $h_P = m_{P'}$, $h_Q = m_{Q'}$, $h_R = m_{R'}$. Schließlich wende man Satz 4.24 an.



Wir beschließen das Kapitel mit einigen speziellen Aussagen über Teilverhältnisse.

Definition 4.6:

P,Q,T_1,T_2 seien vier Punkte auf derselben Geraden mit $P \neq T_2 \neq Q \neq T_1$. Dann heißt

$$DV(P,Q,T_1,T_2) := \frac{d(P,T_1)}{d(T_1,Q)} : \frac{d(P,T_2)}{d(T_2,Q)}$$

das DOPPELVERHÄLTNIS der vier Punkte.
Im Falle $DV(P,Q,T_1,T_2) = 1$ sagt man, die Punkte seien in HARMONISCHER LAGE.

Bemerkung 4.2:

In der Literatur wird die harmonische Lage in der Regel durch -1 und nicht, wie hier, durch $+1$ gekennzeichnet. Man erreicht dies, indem man das Teilverhältnis mittels der Koordinatenfunktion χ (vgl. § 1) folgendermaßen definiert: $TV(P,Q,T) := \frac{\chi(T)-\chi(P)}{\chi(Q)-\chi(T)}$.

Für $P \prec T \prec Q$ ist diese Zahl gleich $\frac{d(P,T)}{d(T,Q)}$, andernfalls gleich $-\frac{d(P,T)}{d(T,Q)}$. Wir verzichten aus Gründen der Vereinfachung auf diese Feinheit.

Aufgabe 4.8:

Werden P und Q durch T_1, T_2 harmonisch geteilt, so auch T_1, T_2 durch P und Q.

Bemerkung 4.3:

Projiziert man eine Gerade zentral auf eine andere, so spricht man von einer PROJEKTIVEN ABBILDUNG (im engeren Sinne).

Satz 4.26:

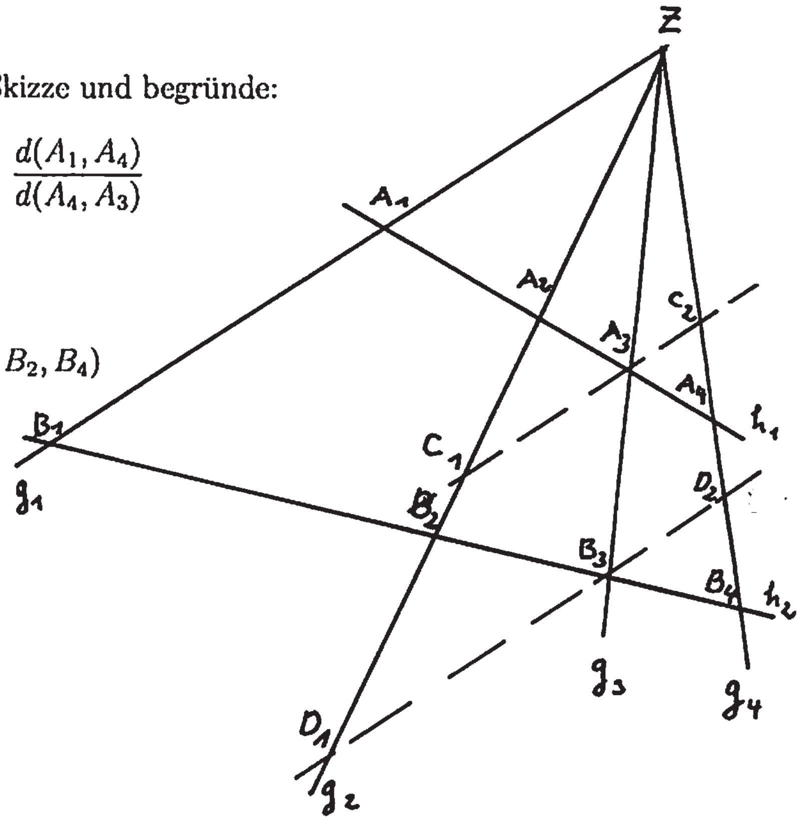
Doppelverhältnisse sind projektiv invariant.

Beweis: Aufgabe.

Hinweis: Man betrachte die nebenstehende Skizze und begründe:

(a) $$DV(A_1, A_3, A_2, A_4) := \frac{d(A_1, A_2)}{d(A_2, A_3)} : \frac{d(A_1, A_4)}{d(A_4, A_3)} = \frac{d(A_3, C_2)}{d(A_3, C_1)}$$

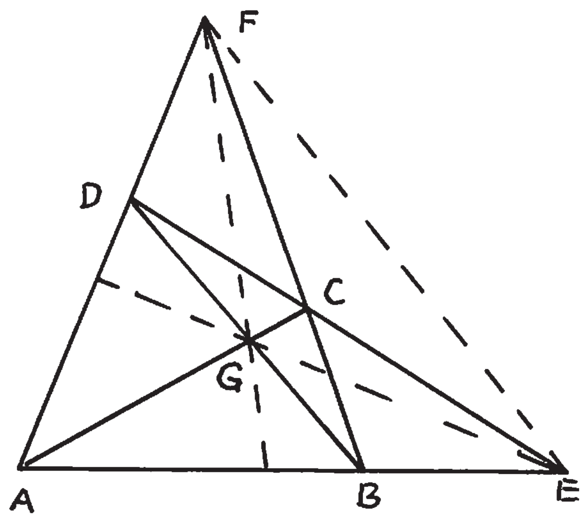
(b) $$DV(A_1, A_3, A_2, A_4) = DV(B_1, B_3, B_2, B_4)$$



Definition 4.7:

Vier von einem Zentrum ausgehende Strahlen heißen HARMONISCH, wenn sie von einer Geraden in einem harmonischen Punktquadrupel geschnitten werden.

Wir untersuchen nun ein sogenanntes VOLLSTÄNDIGES VIERECK $\{A, B, C, D\}$, d.h. ein Viereck mit seinen 6 paarweise einander „gegenüberliegenden" Verbindungsgeraden AC, BD; AB, DC; AD, BC, den durch diese bestimmten „Diagonalenschnittpunkten" E, F, G und den „Diagonalen" EF, FG, GE. Hier gilt folgende Aussage.



Satz 4.27 (vom vollständigen Viereck):

Von jedem Diagonalenpunkt eines vollständigen Vierecks gehen vier harmonische Strahlen aus, die durch ein paar von Gegenseiten und zwei Diagonalen festgelegt sind.

Aufgabe 4.9:

Auf einer Geraden liegen drei Punkte P, Q, R mit $P \prec Q \prec R$, wobei Q nicht der Mittelpunkt von $\overline{PR}$ sein soll. Konstruieren Sie nur mit dem Lineal allein den vierten harmonischen Punkt S, der mit Q ein Paar bildet.