§3 Spiegelungen und Streckungen

In diesem Kapitel werden wir STRUKTURERHALTENDE ABBILDUNGEN der Ebene E auf sich einführen. Mit ihrer Hilfe können wir dann weitere wichtige geometrische Begriffe erklären. Solche Begriffe sind z.B. das LOT von einem Punkt auf eine Gerade. Die Abbildungen der Ebene auf sich bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben α, β, γ usw; die Bilder von von Punkten oder Punktmengen unter diesen Abbildungen kennzeichnen wir durch einfaches Vorsetzen des entsprechenden Symbols für die Abbildung, um größtmögliche Übersichtlichkeit zu erzielen. Nur in Ausnahmefällen verwenden wir Klammern.

Beispiel: $\alpha: E \longrightarrow E$ sei eine Abbildung von E auf E.
Statt $\alpha(P)$ schreiben wir αP,
statt $\alpha(PQ)$ schreiben wir αPQ,
statt $\alpha(W)$ schreiben wir αW,
statt $(\alpha P)(\alpha Q)$ schreiben wir $\alpha P \alpha Q$.

Die Verkettung "$\circ$" von Abbildungen α, β schreiben wir ebenfalls verkürzt:
Statt $(\alpha \circ \beta)(P)$ benutzen wir $\alpha\beta P \left(= \alpha(\beta(P))\right)$.

Die STRUKTUR von E ist gegeben durch die Geradenmenge G, die Abstandsfunktion $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, die Winkelmaßfunktion $\omega: \Omega \longrightarrow [0, 180]$.

Soll eine Abbildung die Struktur "erhalten", so muß sie Geraden in Geraden überführen (GERADENTREUE), Punktepaare in Punktepaare gleichen Abstandes (LÄNGENTREUE) und Winkelfelder in Winkelfelder gleichen Winkelmaßes (WINKELMAßTREUE).

Aufgabe 3.1: Man beweise, daß eine geraden- und längentreue Bijektion $\alpha: E \longrightarrow E$ eine geraden- und längentreue Umkehrabbildung α^{-1} besitzt.

Definition 3.1:

Eine Bijektion $\beta: E \longrightarrow E$ heißt KONGRUENZABBILDUNG, wenn sie GERADEN- und MAßTREU ist, d.h. die Eigenschaften

(1) $\bigwedge_{g \in G} \beta g \in G$ (GERADENTREUE)

(2) $\bigwedge\limits_{P\in\mathcal{E}}\ \bigwedge\limits_{Q\in\mathcal{E}}\ d(P,Q) = d(\beta P,\beta Q)$ (LÄNGENTREUE)

(3) $\bigwedge\limits_{\mathcal{W}\in\Omega}\ \omega(\mathcal{W}) = \omega(\beta\mathcal{W})$ (WINKELMAßTREUE)

besitzt.

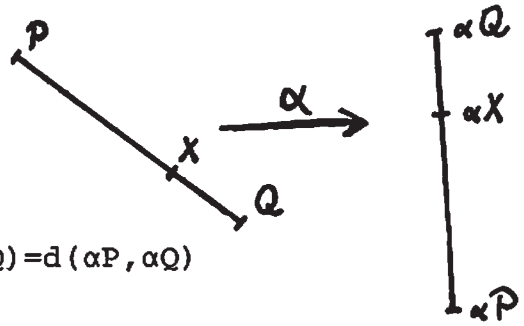
<u>Bemerkung 3.1</u>:
Die Forderung (3) ist nur sinnvoll, wenn β winkelfeldtreu ist.

<u>Satz 3.1:</u>

Jede geraden- und längentreue Bijektion α: $\mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{E}$ ist winkelfeldtreu.

<u>Beweis</u>:

(a) Wir zeigen zuerst, daß α <u>STRECKENTREU</u> ist:



$X \in \overline{PQ} \Leftrightarrow X \in PQ \wedge$
$d(P,X)+d(X,Q) = d(P,Q)$

$\underset{(2)}{\Longrightarrow}\ \alpha X \in \alpha PQ \wedge d(\alpha P,\alpha X)+d(\alpha X,\alpha Q)=d(\alpha P,\alpha Q)$

$\underset{(1)}{\Longrightarrow}\ \alpha X \in \alpha P\alpha Q \wedge d(\alpha P,\alpha X)+d(\alpha X,\alpha Q)=d(\alpha P,\alpha Q)$

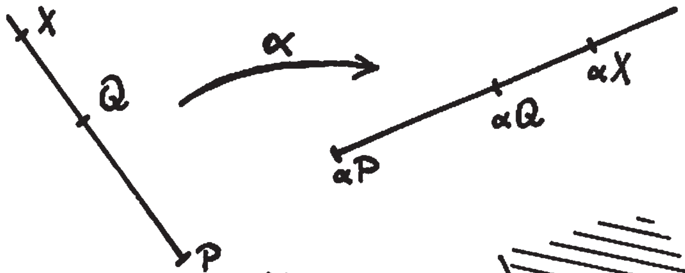
$\Rightarrow \alpha X \in \overline{\alpha P\alpha Q} \quad \Rightarrow \alpha\overline{PQ} \subset \overline{\alpha P\alpha Q}$ (*)

Wendet man α^{-1} auf die Strecke $\overline{\alpha P\alpha Q}$ an, so ergibt sich:

$\alpha^{-1}\overline{\alpha P\alpha Q} \subset \overline{\alpha^{-1}\alpha P\alpha^{-1}\alpha Q} = \overline{PQ} \ \underset{\alpha}{\Rightarrow}\ \overline{\alpha P\alpha Q} \subset \alpha\overline{PQ}$ (**)

Aus (*) und (**) folgt zusammen: $\alpha\overline{PQ} = \overline{\alpha P\alpha Q}$.

(b) Wir zeigen jetzt, daß α <u>HALBGERADENTREU</u> ist:

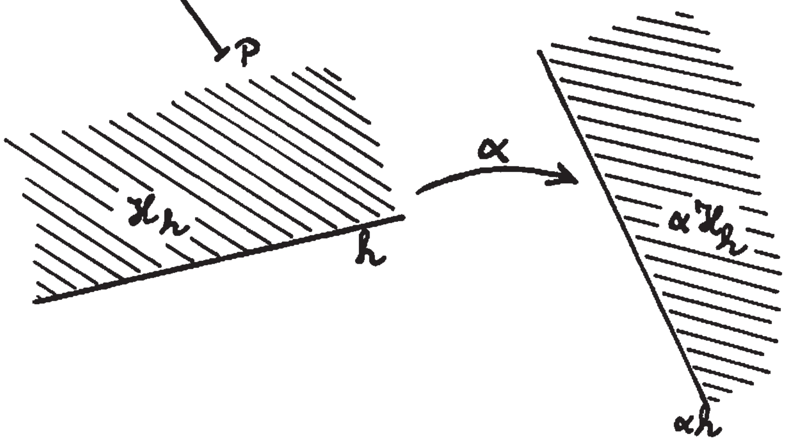


$X \in \overleftarrow{PQ} \ \underset{(Def)}{\Longleftrightarrow}\ X\in\overline{PQ} \vee Q\in\overline{PX}$

$\underset{(a)}{\Longleftrightarrow}\ \alpha X\in\overline{\alpha P\alpha Q} \vee \alpha Q\in\overline{\alpha P\alpha X}$

$\underset{(Def)}{\Longleftrightarrow}\ \alpha X \in \overleftarrow{\alpha P\alpha Q}$.

(c) Wir schließen nun, daß α <u>HALBEBENENTREU</u> ist:



Fielen zwei verschiedene Punkte $P,Q \in H_h$ einer Halbebene H_h von h bei der Abbildung α in verschiedene Halbebenen von αh , so müßte gelten:

$\alpha\overline{PQ} \cap \alpha h = \overline{\alpha P \alpha Q} \cap \alpha h \neq \{\ \}$. Damit würde auch folgen:

$\overline{PQ} \cap h \neq \{\ \}$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Konvexität von H_h !
Also gilt: $\alpha H_h \subset H_{\alpha h}$ (*) . Analog folgt:

$\alpha^{-1} H_{\alpha h} \subset H_{\alpha^{-1}\alpha h} = H_h \underset{\alpha}{\Rightarrow} H_{\alpha h} \subset \alpha H_h$ (**) .

Aus (*) und (**) folgt: $H_{\alpha h} = \alpha H_h$.

(d) Aus (c), (b) ergibt sich unmittelbar der Satz.

Aufgabe 3.2:
Sind $\alpha: E \dashrightarrow E$ und $\beta: E \dashrightarrow E$ geraden-, längen- und winkelmaßtreue Bijektionen, so gilt das auch für die Verkettung $\beta\alpha$.

Definition 3.2:

Eine Bijektion $\alpha: E \dashrightarrow E$ heißt eine ÄHNLICHKEITSABBILDUNG, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

(1) $\bigwedge_{g \in G} \alpha g \in G$ (GERADENTREUE)

(2) $\bigvee_{r \in \mathbb{R}^+} \bigwedge_{P \in E} \bigwedge_{Q \in E} r \cdot d(P,Q) = d(\alpha P, \alpha Q)$ (LÄNGENVERHÄLTNISTREUE)

(3) $\bigwedge_{W \in \Omega} \omega(W) = \omega(\alpha W)$ (WINKELMAßTREUE)

Bemerkung 3.2:
Aus der Geraden- und Längenverhältnistreue folgt, dem Beweis von Satz 3.1 entsprechend, die Winkelfeldtreue, so daß (3) eine sinnvolle Forderung ist.

Bemerkung 3.3:
Jede Kongruenzabbildung ist eine Ähnlichkeitsabbildung.

Definition 3.3:

Eine Kongruenzabbildung $\gamma\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ heißt ACHSENSPIEGELUNG, wenn gilt:

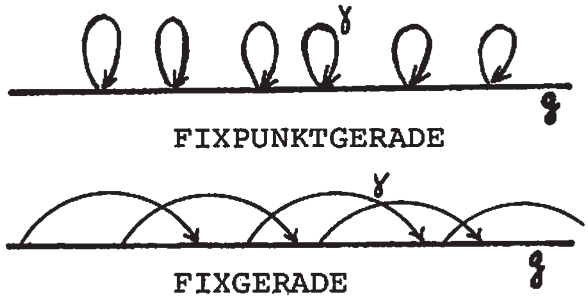
(1) es existiert eine Fixpunktgerade $g \in \mathcal{G}$ unter γ, d.h. $\bigwedge_{P \in g} \gamma P = P$,

(2) die beiden Halbebenen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ von g sind Bilder voneinander, d.h. $\gamma \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 \wedge \gamma \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1$.

g heißt ACHSE der Spiegelung γ .

Bemerkung 3.4:
Eine Fixpunktgerade besteht nur aus Fixpunkten; dies sind Punkte, die auf sich abgebildet werden.

Im Gegensatz dazu bleibt eine Fixgerade als Ganzes fest: $\gamma g = g$.



AXIOM VIII (SPIEGELUNGSAXIOM):

Zu jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ gibt es genau eine Achsenspiegelung γ_g mit g als Achse.

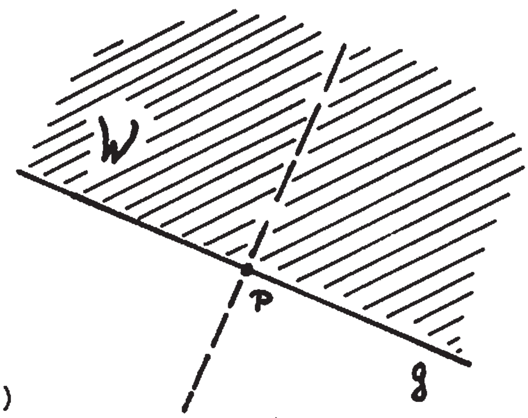
Bemerkung 3.5:
Das Axiom VIII garantiert die Existenz von Kongruenzabbildungen, und zwar als Achsenspiegelungen und deren Verkettungen. Später werden wir zeigen, daß jede Kongruenzabbildung als Verkettung von Achsenspiegelungen darstellbar ist.

Satz 3.2:

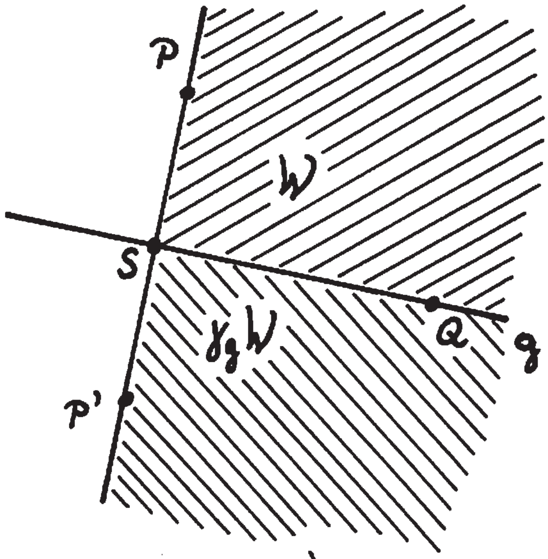
Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt P gibt es genau eine Senkrechte zu g durch P.

Beweis:

(a) 1.Fall: Sei $P \in g$.
Wir betrachten ein gestrecktes Winkelfeld mit dem Rand g und dem Scheitel P. Zu diesem gibt es genau eine Winkelhalbierende (nach Aufgabe 2.4 auf Seite 2.14)



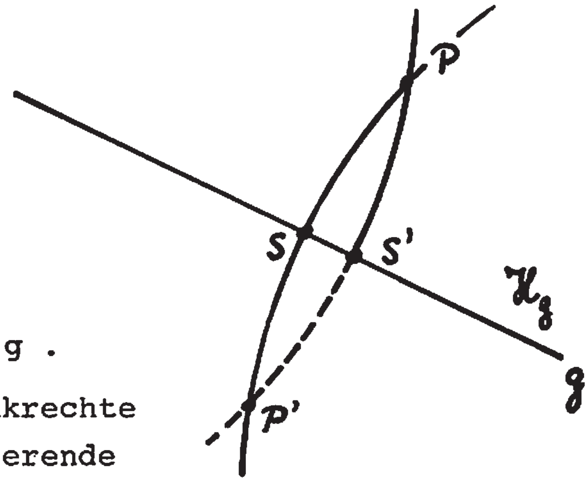
und diese heißt (nach Def.2.6 auf Seite 2.14) Senkrechte zu g in P.



2.Fall: Sei $P \notin g$.
Die Achsenspiegelung γ_g (Axiom VIII) werfe P nach P'. P und P' liegen in verschiedenen Halbebenen von g (nach Def.3.3). Daher schneidet die Gerade PP' die Gerade g in einem Punkt S:

$PP' \cap g = \{S\}$.

Sei $Q \in g$ mit $Q \neq S$:
Die Nebenwinkelfelder $W = \sphericalangle PSQ$ und $\gamma_g(W) = \sphericalangle P'SQ$ zerlegen ein gestrecktes Winkelfeld mit dem Rande PP' und besitzen wegen der Winkelmaßtreue von γ_g das gleiche Winkelmaß (nämlich 90). Nach Definition 2.6 gilt damit: $PP' \perp g$.
Die Existenz einer Senkrechten zu g ist also gesichert.



(b) Gibt es neben PS noch eine Senkrechte PS' zu g durch P, so ist wegen der Winkelmaßtreue von γ_g auch das Spiegelbild $\gamma_g(PS') = P'S'$ senkrecht zu g, d.h. $\gamma_g(PS') \perp g$.
Da es durch S' nur eine Senkrechte zu g gibt (als Winkelhalbierende des gestreckten Winkelfeldes H_g), folgt: $PS' = P'S'$.
Damit ist $\{P,P'\} \subset PS'$ und deshalb $PP' = PS'$. Also gilt: $S' = S$. Damit ist die Eindeutigkeit der in Rede stehenden Senkrechten gesichert.

Definition 3.4:

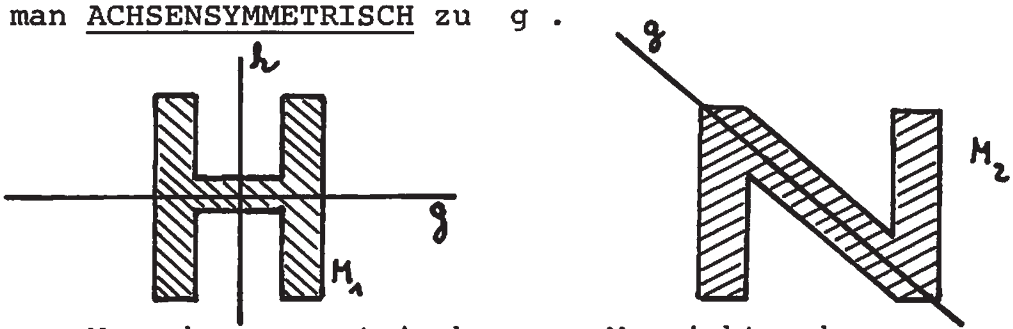
Die eindeutig bestimmte senkrechte Gerade h zu einer gegebenen Geraden g durch einen gegebenen Punkt $P \in E$ heißt das LOT von P auf g; der Schnittpunkt von h mit g wird LOTFUßPUNKT genannt.

Definition 3.5:

Eine Gerade g heißt SYMMETRIEACHSE einer Teilmenge M von E, wenn gilt $\gamma_g M = M$.

M nennt man ACHSENSYMMETRISCH zu g.

Skizze:



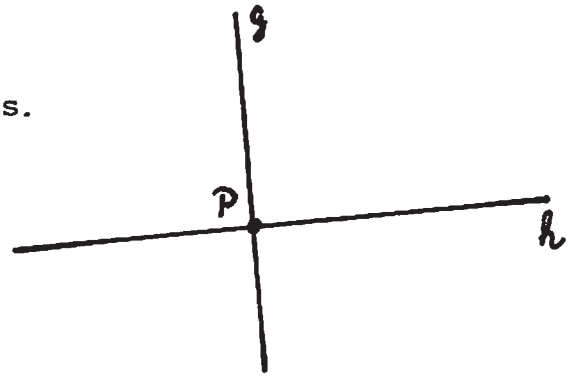
M_1 achsensymmetrisch zu g und h

M_2 nicht achsensymmetrisch zu g

Satz 3.3:

Von zwei zueinander senkrechten Geraden ist jede Symmetrieachse der anderen.

Beweis: Aufgabe. Skizze siehe rechts.

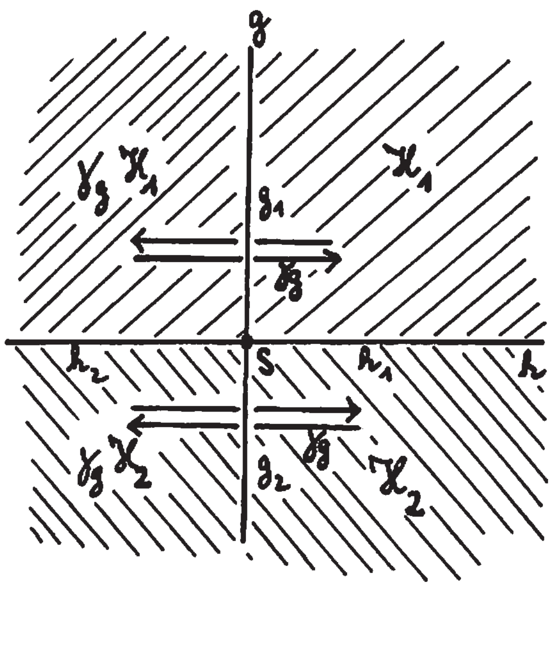


Satz 3.4:

Sind g und h Geraden mit $g \perp h$, so bildet die Achsenspiegelung γ_g jede der beiden Halbebenen H_1, H_2 zu h auf sich ab:

$$\gamma_g H_1 = H_1 \wedge \gamma_g H_2 = H_2 .$$

Beweis:
Man betrachte nebenstehende Abbildung:
h wird durch γ_g auf sich abgebildet (wobei h_1 auf h_2 und h_2 auf h_1 fällt).
Dann muß $E \setminus h$ wegen der Bijektivität von γ_g auch auf sich abgebildet werden. $E \setminus h$ zerfällt aber in die beiden Halbebenen H_1 und H_2.



γ_g ist halbebenentreu, daher kann nur gelten:

$$\gamma_g H_1 = H_1 \quad \text{oder} \quad \gamma_g H_1 = H_2 \; .$$

Da die Punkte von g_1 Fixpunkte von H_1 sind (da sie zu der Achse g der Spiegelung γ_g gehören), können sie nur nach H_1 abgebildet werden, denn es gilt:

$$H_1 \cap H_2 = \{\,\} \; .$$

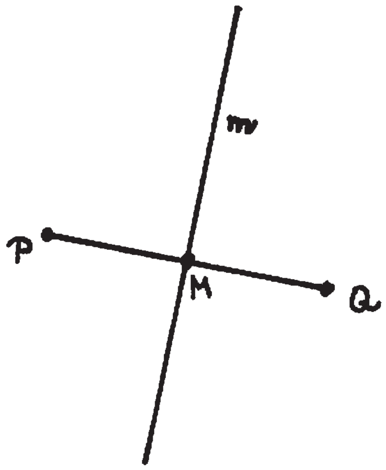
Damit ist jedoch $\gamma_g H_1 = H_2$ ausgeschlossen, d.h. es gilt:

$\gamma_g H_1 = H_1$. Wegen der Bijektivität von γ_g folgt dann unmittelbar: $\gamma_g H_2 = H_2$.

Definition 3.6:

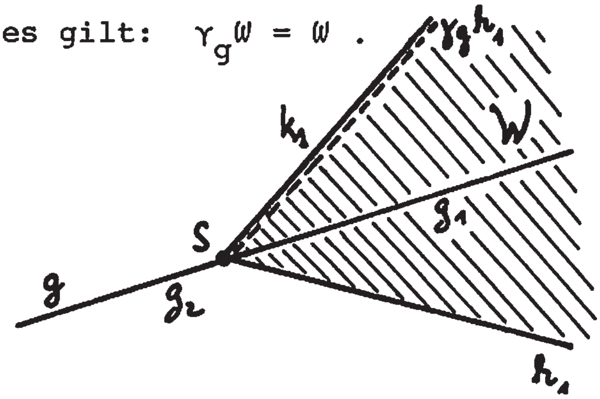
Ist $P \neq Q$ $(P,Q \in E)$, so heißt die im Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ errichtete Senkrechte zu PQ MITTELSENKRECHTE von $\overline{PQ}$.

Skizze:



Satz 3.5:

Ist g die Winkelhalbierende des Winkelfeldes W , so ist g Symmetrieachse von W , d.h. es gilt: $\gamma_g W = W$.



Beweis: (siehe Abb.)

Es ist $\gamma_g W = W$ nachzuweisen.

Für Nullwinkelfelder ist diese Aussage trivial.

Wir zeigen: Für andere Winkelfelder ist $\gamma_g h_1 = k_1$.

Da g_1 das Winkelfeld W zerlegt, liegen h_1 und k_1 in verschiedenen abgeschlossenen Halbebenen zu g . Dann liegt aber $\gamma_g h_1$ in derselben abgeschlossenen Halbebene wie k_1 .

g ist Fixpunktgerade; demnach gilt: $\gamma_g g_1 = g_1$.

Wegen der Winkelmaßtreue von γ_g sind die Winkelfelder $\sphericalangle g_1\, \gamma_g h_1$ und $\sphericalangle g_1 k_1$ vom Schenkel g_1 aus in derselben Halbebene zu g mit demselben Maß abgetragen. Die eindeutige Abtragbarkeit sichert nun $\gamma_g h_1 = k_1$.
Analog zeigt man: $\gamma_g k_1 = h_1$.
Die Winkelfeldtreue von γ_g garantiert nun, daß die Teilwinkelfelder $\sphericalangle h_1 g_1$ und $\sphericalangle k_1 g_1$ gegenseitig aufeinander abgebildet werden. Dies bedeutet aber: $\gamma_g \mathcal{W} = \mathcal{W}$.

<u>Aufgabe 3.3</u>:
id: $E \longrightarrow E$ sei die identische Abbildung und $\gamma_g : E \longrightarrow E$ eine Achsenspiegelung. Man zeige, daß gilt:

$$\gamma_g \gamma_g = \mathrm{id} .$$

<u>Aufgabe 3.4</u>:
Man prüfe, ob jede Achsenspiegelung parallele Geraden in parallele Geraden überführt.

<u>Aufgabe 3.5</u>:
γ sei eine Achsenspiegelung. Ist dann auch γ^{-1} eine Achsenspiegelung?

<u>Aufgabe 3.6</u>:
Die Gerade g schneide die Gerade h senkrecht, d.h. es gelte: $g \perp h$. Man zeige, daß die Achsenspiegelung γ_g die Ordnungsbeziehungen zwischen den Punkten von h vertauscht: $\bigwedge_{P \in h} \bigwedge_{Q \in h} P \prec Q \Rightarrow \gamma_g Q \prec \gamma_g P$.

<u>Anl</u>: Hilfreich sind die Lageunterscheidungen für P, Q auf h bezüglich g .

<u>Aufgabe 3.7</u>:
Für $P, Q \in E$ mit $P \neq Q$ ist die Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$ Symmetrieachse von $\overline{PQ}$.

<u>Anl</u>: Man verwende die Senkrechtbeziehung und die Streckentreue.

Aufgabe 3.8:
Man zeige, daß alle Punkte auf der Mittelsenkrechten einer Strecke von den beiden Randpunkten der Strecke gleich weit entfernt sind.

Aufgabe 3.9:
h sei die Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$, $P \neq Q$. Man beweise:

$$\bigwedge_{R \in E} d(R,P)=d(R,Q) \rightarrow R \in h .$$

Anl.: Man führe einen indirekten Beweis unter der Annahme, daß gilt: $R \notin h$. An der Winkelhalbierenden g von $\sphericalangle PRQ$ durch γ_g spiegeln und $\overleftrightarrow{RP}$ in $\overleftrightarrow{RQ}$ überführen. Warum ist dabei $\gamma_g P = Q$? Warum ist dann $PQ \perp g$? Warum schneidet g die Strecke $\overline{PQ}$ in der Mitte? Warum ist $g = h$?

Definition 3.7:

Gegeben seien ein Punkt $Z \in E$ und eine reelle Zahl $k \neq 0$.
Eine Abbildung $\sigma: E \dashrightarrow E$
heißt STRECKUNG mit dem ZENTRUM Z und dem STRECKFAKTOR k , wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

(1) $\bigwedge_{P \in E} d(Z,\sigma P) = |k| \cdot d(Z,P)$

(2) $\bigwedge_{P \in E \setminus \{Z\}} \left(k>0 \rightarrow \sigma P \in \overleftrightarrow{ZP} \wedge k<0 \rightarrow \sigma P \in ZP \setminus \overleftrightarrow{ZP} \right)$

Aufgabe 3.10:
Man mache sich die Eigenschaften (1) und (2) für $k=3$ und $k=-2$ zeichnerisch klar. Dabei lege man "nichtkrumme" Linien in der Zeichenebene als "Geraden" zugrunde (so, wie das bisher in fast allen Zeichnungen getan wurde).

Aufgabe 3.11:
Man prüfe, ob die Hintereinanderausführung von zwei Achsenspiegelungen wieder eine Achsenspiegelung ist.

Aufgabe 3.12:
Man beweise, daß jede Streckung $\sigma: E \dashrightarrow E$ mit dem Streckfaktor $k \neq 1$ genau ihr Zentrum als Fixpunkt besitzt.

Bemerkung 3.6: Im Falle $k=1$, gilt für jede Streckung:

$\sigma = id$.

Aufgabe 3.13:

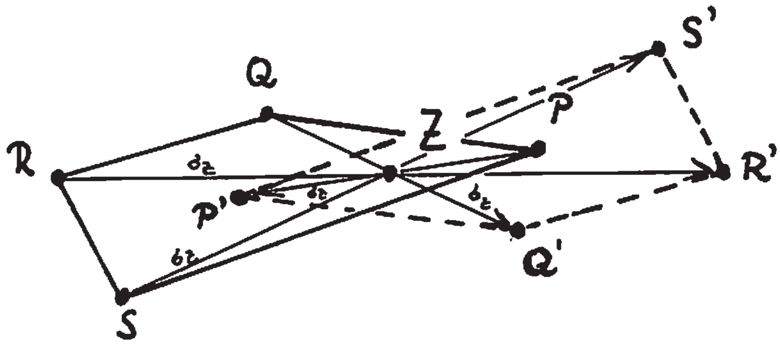
σ sei eine Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor $k \neq 0$. g sei eine Gerade durch Z . Man beweise: Ist $k>0$, so werden die beiden Halbebenen H_1 und H_2 zu g auf sich abgebildet; ist $k<0$, so werden die Halbebenen durch σ vertauscht.

Anl: Man denke sich die Halbebenen mittels Halbgeraden erzeugt.

Definition 3.8:

Eine Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor $k = -1$ heißt PUNKTSPIEGELUNG σ_Z an Z .

Skizze:



Aufgabe 3.14:

Man beweise, daß für Punktspiegelungen σ_Z gilt:

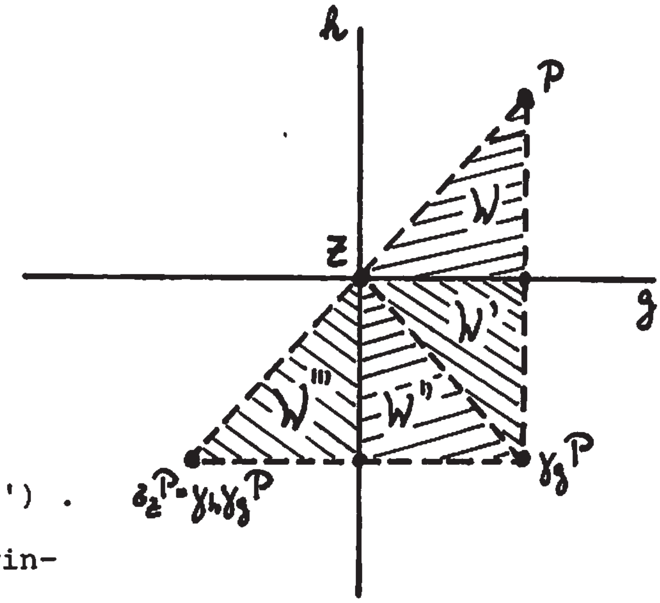
$$\sigma_Z \sigma_Z = id \; .$$

Jede Punktspiegelung läßt sich durch die uns bekannten Achsenspiegelungen darstellen:

Satz 3.6:

Sind γ_g , γ_h Achsenspiegelungen mit zueinander senkrechten Achsen g und h , die sich in Z schneiden, dann gilt:

$$\gamma_h \gamma_g = \sigma_Z \; .$$



<u>Beweis</u> zu Satz 3.6:

Wir zeigen, daß $\gamma_h\gamma_g$ eine Streckung mit dem Streckfaktor $k=-1$ und dem Zentrum Z ist:

$\gamma_h\gamma_g P \in ZP\setminus\overleftarrow{ZP}$ und

$d(Z,\gamma_h\gamma_g P) = d(Z,P)$.

γ_g ist winkelmaßtreu: $\omega(W') = \omega(W)$

γ_h ist winkelmaßtreu: $\omega(W'') = \omega(W''')$.

$W' \cup W''$ ist Zerlegung eines Rechtwinkelfeldes: $\omega(W') + \omega(W'') = 90$.

Daraus folgt: $\omega(\sphericalangle PZ\gamma_h\gamma_g P) = 180$. Demnach gilt:

$\gamma_h\gamma_g P \in ZP\setminus\overleftarrow{ZP}$ (Streckungseigenschaft (2) mit einem Streckfaktor $k<0$) .

γ_g und γ_h sind längentreu, daher gilt wegen $Z \in g \cap h$:

$d(Z,P) = d(Z,\gamma_g P) = d(Z,\gamma_h\gamma_g P)$ (Streckungseigenschaft (1) mit Streckfaktor $|k| = 1$).

Also ist $\gamma_h\gamma_g$ <u>die</u> Punktspiegelung an Z .

<u>Folgerung 3.1</u>:

Da auch $\gamma_g\gamma_h$ <u>die</u> Punktspiegelung an Z liefert, ergibt sich:

Spiegelungen an zueinander senkrechten Achsen sind vertauschbar.

<u>Folgerung 3.2</u>:

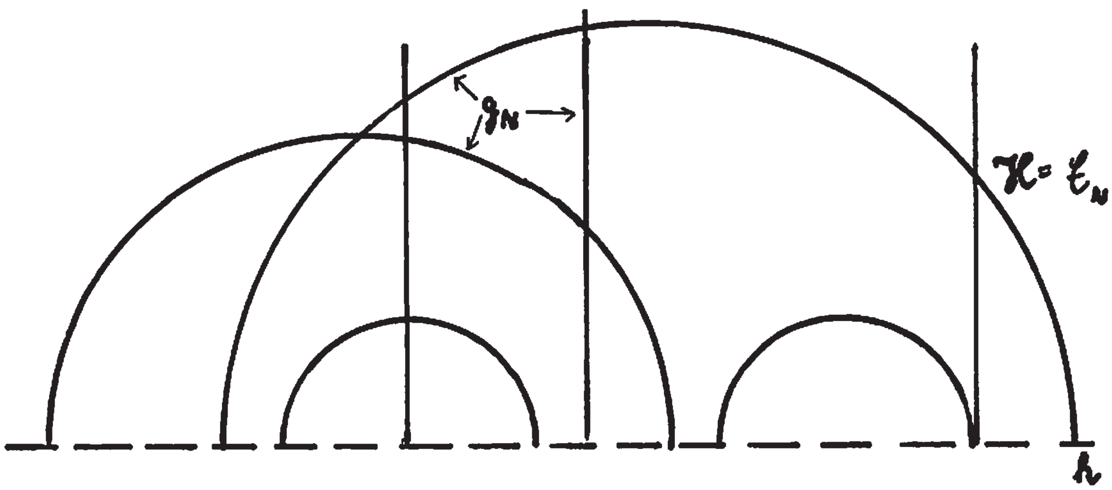
Punktspiegelungen sind Kongruenzabbildungen.

NICHTEUKLIDISCHE GEOMETRIE: Das POINCARÉ-Modell der Halbebene

Normalerweise stellen wir uns die geometrische Ebene $\mathcal{E}$ als Zeichenebene und in jener die Geraden $g \in \mathcal{G}$ als am Lineal gezogene Linien vor.
Das ideale Modell für diese Vorstellungen ist die ebene analytische Geometrie in $\mathcal{E} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Ein weiteres Modell läßt sich aus der analytischen Geometrie durch Umbenennung einiger Objekte ableiten:
Man betrachtet eine offene Halbebene, etwa die obere Halbebene zur x-Achse, $\mathcal{E}_N = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$,

als NEUE EBENE $\mathcal{E}_N$. Die Menge der NEUEN GERADEN, $\mathcal{G}_N$, wird gebildet aus allen "Halbkreisen" in $\mathcal{E}_N$ mit dem Mittelpunkt auf der x-Achse und allen zur x-Achse senkrechten "Halbgeraden" mit dem Anfangspunkt auf der x-Achse. Dabei bedeuten die Anführungsstriche, daß die Punkte der x-Achse nicht zu den Geraden dazuzählen, d.h. die Geraden sind an der x-Achse offen.



Zur Prüfung der Geometrieeigenschaften des Modells ziehen wir unser Axiomensystem heran, das wir hier zusammengefaßt wiedergeben:

I : Jeder Geraden gehören mindestens zwei (voneinander verschiedene) Punkte an.

II : Durch je zwei (voneinander verschiedene) Punkte von $\mathcal{E}_N$ geht <u>genau</u> eine Gerade von $\mathcal{G}_N$.

III: Es gibt drei nicht auf ein und derselben Geraden gelegene Punkte in $\mathcal{E}_N$.

IV : Auf jeder Geraden $g_N \in G_N$ existiert eine lineare, strenge Ordnungsrelation $<_{g_N}$.

V : Es gibt eine (1) symmetrische, (2) additive und (3) eindeutig abtragbare Abstandsfunktion $d_N: E_N \times E_N \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$.

VI : Jede Gerade g_N teilt $E \setminus g_N$ in zwei (1) konvexe Klassen H_{N_1}, H_{N_2} ein. Dabei gilt:

(2) $\bigwedge\limits_{P \in H_{N_1}} \bigwedge\limits_{Q \in H_{N_2}} \overline{PQ} \cap g_N \neq \{\ \}$.

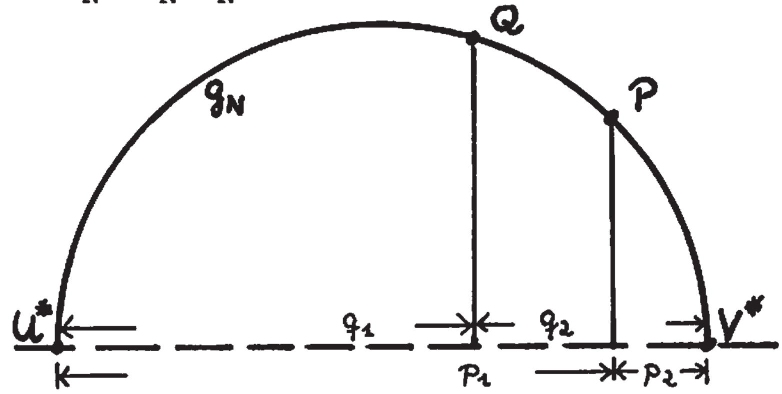
VII: Es gibt eine (1) additive, (2) eindeutig abtragbare Winkelmaßfunktion $\omega_N: \Omega_N \longrightarrow [0,180]$.

VIII: Zu jeder Geraden $g_N \in G_N$ existiert genau eine Achsenspiegelung Υ_{g_N} mit g_N als Achse.

Die Axiome I,II,III,IV sind erfüllt, wie man leicht sieht.

V : Die Metrik $d_N: E_N \times E_N \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ setzen wir folgendermaßen fest:

(a)

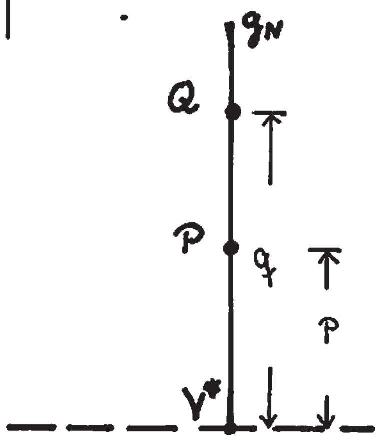


Liegen P und Q auf einer N-Geraden g_N, die durch einen (bei U^* und V^* offenen) Halbkreis dargestellt wird, so setzen wir mit den euklidischen Entfernungen p_1, p_2, q_1, q_2 fest:

$$d_N(P,Q) = \left|\ln\left(\frac{p_1}{p_2} : \frac{q_1}{q_2}\right)\right| .$$

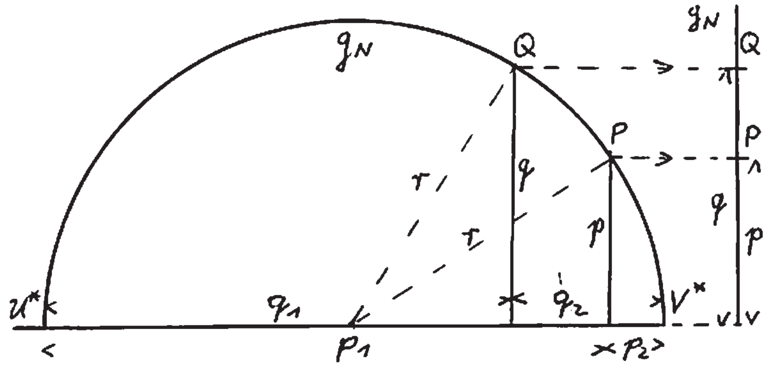
(b) Liegen P und Q auf einer N-Geraden, die durch eine senkrechte Halbgerade (ohne Anfangspunkt) dargestellt wird, so setzen wir entsprechend fest:

$$d_N(P,Q) = 2\left|\ln \frac{q}{p}\right| .$$



Bemerkung 3.7:

Die Festsetzung (b) kann man als Grenzfall von (a) für $U^* \to \infty$ bzw. $r \to \infty$ deuten. Dabei streckt sich die "halbkreisförmige Gerade" g_N zu einer senkrechten Halb-Geraden" g_N.



Die Entfernung $d_N(Q,P) = \left| \ln \frac{q_1}{q_2} : \frac{p_1}{p_2} \right|$ transformiert sich wie folgt: Mit $r^2 = q^2+(r-q_2)^2$ und $r^2 = p^2+(r-p_2)^2$ ergibt sich durch Auflösen nach q_2 bzw. p_2

$$\ln \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} = \ln \frac{2r-q_2}{r-\sqrt{r^2-q^2}} \cdot \frac{r-\sqrt{r^2-p^2}}{2r-p_2} = \ln \frac{r+\sqrt{r^2-q^2}}{r+\sqrt{r^2-p^2}} \cdot \frac{r-\sqrt{r^2-p^2}}{r-\sqrt{r^2-q^2}}$$

$$= \ln \frac{(r+\sqrt{r^2-q^2})\,(r-\sqrt{r^2-p^2})\,(r+\sqrt{r^2-p^2})\,(r+\sqrt{r^2-q^2})}{(r+\sqrt{r^2-p^2})\,(r-\sqrt{r^2-q^2})\,(r+\sqrt{r^2-q^2})\,(r+\sqrt{r^2-p^2})}$$

$$= \ln \frac{(r+\sqrt{r^2-q^2})^2 p^2}{(r+\sqrt{r^2-p^2})^2 q^2} = \ln \frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{q^2}{r^2}}\right) p^2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{p^2}{r^2}}\right) q^2} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \ln \frac{p^2}{q^2}\,.$$

Das bedeutet

$$\lim_{U^*\to\infty} d_N(Q,P) = \left|\ln \left(\frac{p}{q}\right)^2\right| = 2\left|\ln\frac{p}{q}\right| = 2\left|\ln\frac{q}{p}\right|\,.$$

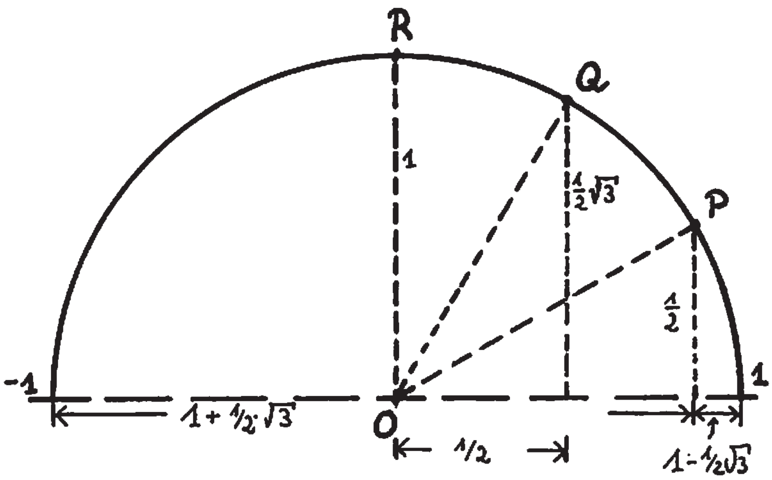
Nach Konstruktion bildet d_N in $\mathbb{R}_0^+$ ab.

Aufgabe 3.15:

Man bestimme die "Länge der Geraden" im N-Modell durch Betrachtung der Grenzübergänge $Q \to U^*$ bzw. $P \to V^*$ (vgl. dazu die Abbildungen auf Seite 3.13).

Aufgabe 3.16:

Man prüfe die Additivität der Entfernungsfunktion d_N am Beispiel der 3 Punkte P,Q,R in der Zeichnung.



Aufgabe 3.17:

Man zeige, daß d_N: $E_N \times E_N \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ (1) symmetrisch, (2) additiv, (3) eindeutig abtragbar ist.

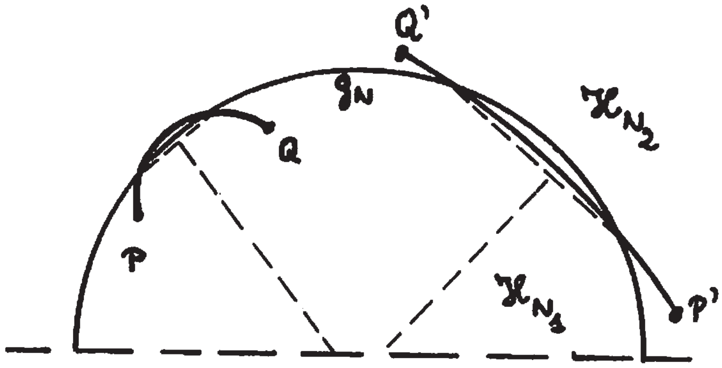
Prüfen wir nun das Erfülltsein des Axoims VI:

Absatz VI,(2) und die Konvexität der Halbebenen für den Fall, daß g_N durch eine klassische Halbgerade dargestellt wird, treffen mit Sicherheit zu.

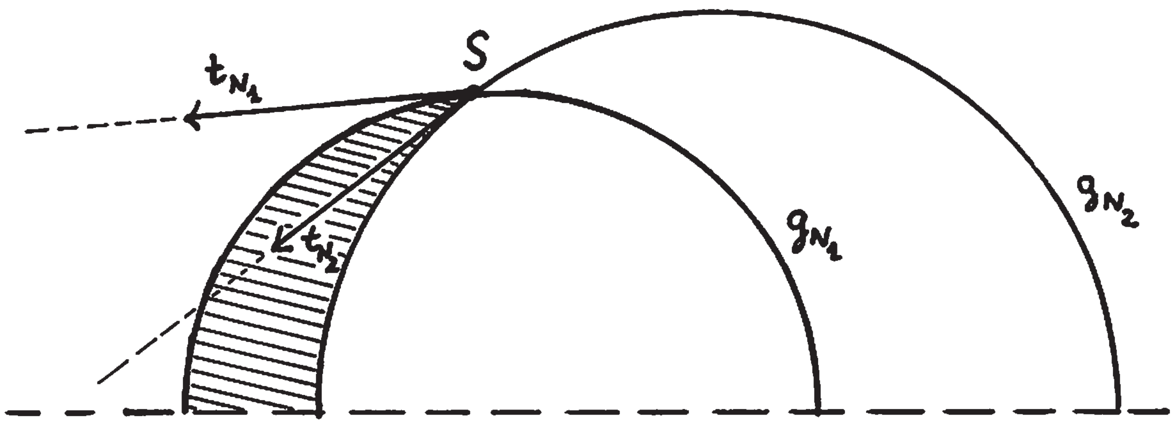
Aufgabe 3.18:

Man beweise, daß die beiden Halbebenen H_{N_1} und H_{N_2}, in die $E_N \setminus g_N$ durch die "halbkreisförmige Gerade" g_N zerlegt wird, konvex sind.

Anl: Die Annahme des Gegenteils führt zu einer gemeinsamen Sehne (oder Tangente) der zerlegenden "Geraden" g_N und der "Verbindungsstrecke" $\overline{PQ}$ (bzw. $\overline{Q'P'}$) .



Prüfen wir das Erfülltsein des Axioms VII:



Winkelfelder entstehen als Durchschnitte von abgeschlossenen Halbebenen zu sich schneidenden Geraden bzw. als Nullwinkelfeld oder gestrecktes Winkelfeld entsprechend den Festsetzungen auf Seite 2.6 .

Wir legen nun im Schnittpunkt von zwei N-Geraden die euklidischen Tangenten (t_{N_1}, t_{N_2}) "an die N-Geraden" und ordnen dem N-Winkelfeld das "natürliche" Maß ω des Winkelfeldes zu, welches die "passenden" Halbtangenten als Rand besitzt: (s.dazu die Abb. auf Seite 3.15 unten)

$$\omega \sphericalangle g_{N_1} g_{N_2} := \omega \sphericalangle t_{N_1} t_{N_2} \quad .$$

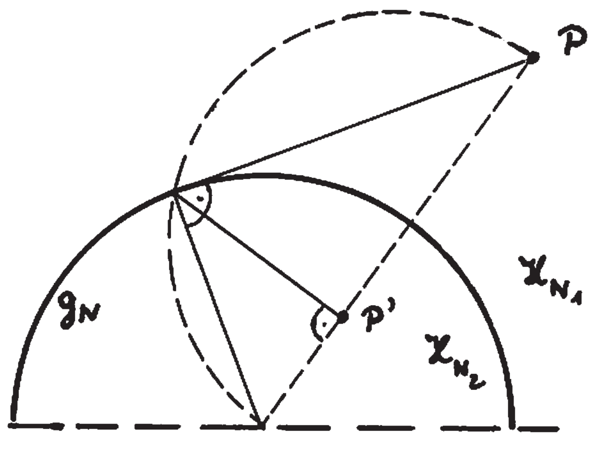
Man erkennt leicht, daß die so auf das klassische Winkelmaß zurückgeführte Winkelmaßfunktion additiv ist.

Aufgabe 3.19:
Man mache sich elementargeometrisch klar, daß die Winkelmaße eindeutig abtragbar sind.

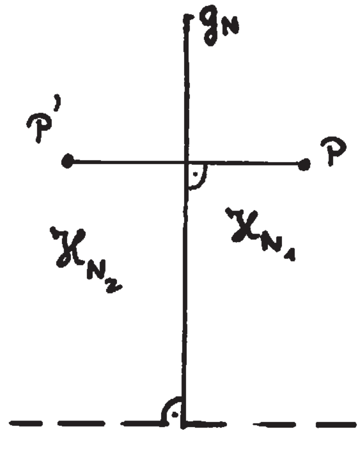
Erfülltsein des Axioms VIII:

Die Achsenspiegelung zu einer gegebenen Geraden g_N wird nach der Konstruktionsvorschrift durchgeführt, die aus den folgenden Zeichnungen zu ersehen ist (darin sind P und P' voneinander Spiegelpunkte, d.h. $\gamma_{g_N} P = P'$ und $\gamma_{g_N} P' = P$).

(a)



(b)



Die Zeichnungen zeigen, daß
(1) g_N eine Fixpunktgerade unter γ_{g_N} ist;
(2) die beiden Halbebenen zu g_N unter γ_{g_N} Bilder voneinander sind.

Damit sind die Achsenspiegelungsbedingungen (1),(2) von Seite 3.4 erfüllt.

Man kann (sehr umständlich) zeigen, daß γ_{g_N} eine Kongruenzabbildung ist, d.h. sie ist geraden-, längen-, winkelfeld- und winkelmaßtreu.
Wir wollen uns die damit verbundene Mühe ersparen.

Es bleibt zu konstatieren, daß das entwickelte Modell zur Veranschaulichung der aus unserem Axiomensystem abgeleiteten Sätze und Zusammenhänge ebenso geeignet ist wie die bisher von uns bevorzugte euklidische Darstellungsform.