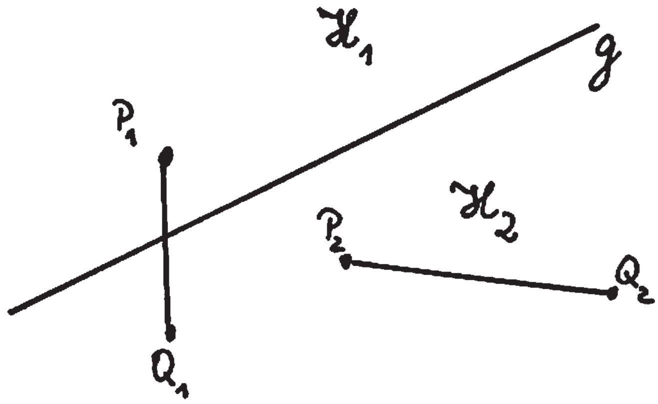
§ 2 Halbebene, Winkelfeld, Winkelmaß

Die Zeichenebene wird durch jede ihrer Geraden derart in zwei Halbebenen zerlegt, daß eine Strecke, die einen Punkt der einen Halbebene mit einem Punkt der anderen Halbebene verbindet, diese Gerade schneidet.

Außerdem gehört die Verbindungsstrecke je zweier Punkte derselben Halbebene ganz dieser Halbebene an (s. Abb.).

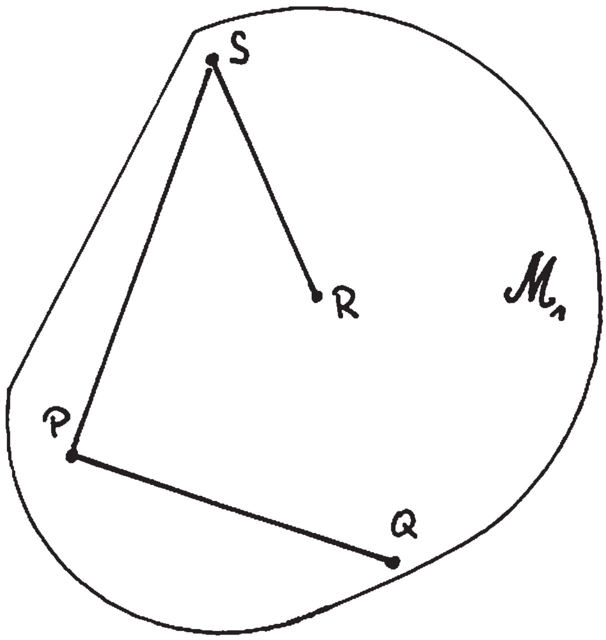


Zur axiomatischen Beschreibung dieses Sachverhalts benutzen wir den Begriff der Konvexität.

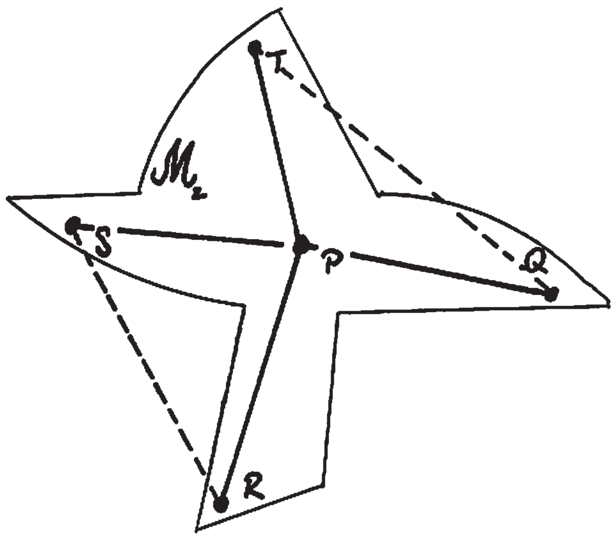
Definition 2.1:

Die Untermenge M von E heißt KONVEX, wenn mit je zwei Punkten $P,Q \in M$ die Strecke $\overline{PQ}$ zu M gehört:

$$\bigwedge_{P \in E} \bigwedge_{Q \in E} \{P,Q\} \subset M \rightarrow \overline{PQ} \subset M \Longleftrightarrow M \text{ konvex.}$$



$\mathcal{M}_1$ konvexe Menge



$\mathcal{M}_2$ nicht-konvexe Menge

(hier: sternförmig bezgl. P)

Beispiele konvexer Mengen:

a) Die Ebene E

b) Jede Gerade $g \subset E$

c) $\emptyset$

d) Jede Halbgerade

e) Jede Strecke

f) Jede einpunktige Menge

<u>Satz 2.1</u>:

Die Vereinigung zweier verschiedener Geraden ist nicht konvex.

<u>Beweis</u>: Aufgabe

<u>Anl</u>.: Im Falle $g \neq h$ und $g \cap h = \{S\}$ begründe man,

a) daß $P \in g$ und $Q \in h$ mit $P \neq S \neq Q$ existieren,

b) daß $P \neq Q$ gilt,

c) daß $Z \in \overline{PQ}$ mit $P \neq Z \neq Q$ existiert.

d) Man zeige: $\bigwedge_{Z \in \overline{PQ}} P \neq Z \neq Q \rightarrow Z \notin g \cup h$

(Widerspruchsbeweis).

<u>Satz 2.2</u>:

Der Durchschnitt zweier konvexer Mengen ist konvex.

<u>Beweis</u>: Aufgabe

<u>AXIOM VI (HALBEBENENAXIOM)</u>:

Zu jeder Geraden $g \subset E$ gibt es <u>genau</u> zwei nicht leere Untermengen $H_1, H_2 \subset E$ mit den Eigenschaften

(1) H_1 und H_2 sind konvex,

(2) $H_1 \cup H_2 = E \setminus g$ und $H_1 \cap H_2 = \emptyset$,

(3) $\bigwedge_{P \in H_1} \bigwedge_{Q \in H_2} \overline{PQ} \cap g \neq \emptyset$.

H_1, H_2 heißen (offene) <u>HALBEBENEN</u> zu g, g heißt <u>RAND</u> der Halbebenen, $H_1 \cup g$ bzw. $H_2 \cup g$ heißen <u>ABGESCHLOSSENE HALBEBENEN</u> zu g.

Satz 2.3:

Jede Parallele h' zu einer Geraden h $\neq$ h' liegt ganz in einer der beiden Halbebenen zu h.

Beweis:

Andernfalls wäre $h \cap h' \neq \emptyset$.

Satz 2.4:

Ist H Halbebene zu h' und H Halbebene zu h*, so gilt h' = h*.

Beweis: Aufgabe

Anl.: Betrachte $E \setminus h' = H \cup H'$ und $E \setminus h^* = H \cup H^*$. Man benutze $h' \neq h^* \wedge h' \| h^* \Rightarrow h' \subset H \vee h' \subset H^*$; entsprechend für h*.

a) Man betrachte den Fall $h' \| h^*$ und schließe mittels Axiom VI (Halbebenenaxiom) auf h* = h'.

b) Man betrachte den Fall $h' \cap h^* = \{S\}$, wähle $P, Q \in h'$ mit $S \in \overline{PQ}$ und folgere $P \in H$ und $Q \in H^*$ (oder umgekehrt). Widerspruch dazu, daß H und h' keinen gemeinsamen Punkt haben.

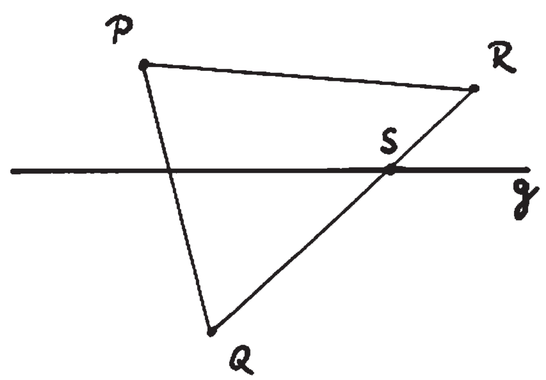
Aufgabe 2.1: Es seien $H \cup h$ und $H' \cup h'$ abgeschlossene Halbebenen zu den Geraden h bzw. h'.
Man beweise: $H \cup h = H' \cup h' \Rightarrow H = H'$ und $h = h'$.

Anl.: Man verwende das Halbebenenaxiom und führe den Beweis mengentheoretisch.

Bem.: So wie jede Gerade durch jeden ihrer Punkte in zwei Halbgeraden aufgeteilt wird, teilt jede Gerade die Ebene in zwei Halbebenen auf.

Satz 2.5 (von Pasch):

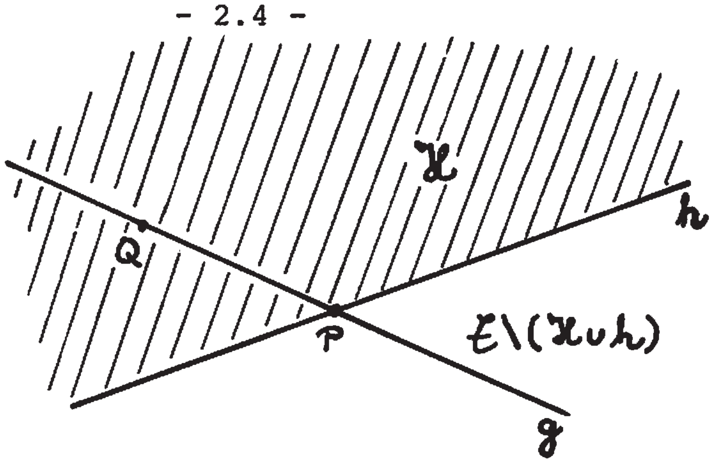
P, Q, R sein drei nicht kollineare Punkte.
Schneidet eine Gerade g die Strecke $\overline{QR}$ in S mit $S \notin \{Q, R\}$, so schneidet g auch eine der Strecken $\overline{PQ}$ oder $\overline{PR}$.



Beweis: Aufgabe

Anl.: Man betrachte die Halbebenen H_1 und H_2 zu g und wende auf $\overline{QP}$ bzw. $\overline{PR}$ das Halbebenenaxiom an.

Satz 2.6:



h sei Rand der Halbebene $\mathcal{H}$, g schneide h in P und enthalte $Q \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$(\mathcal{H} \cup h) \cap g = \overrightarrow{PQ}$

Beweis:

Wir unterscheiden die Fälle $P < Q$ und $Q < P$.

Sei $P < Q$:

Es gilt $\overrightarrow{PQ} \subset \mathcal{H} \cup h$; wäre nämlich $X \in \overrightarrow{PQ}$ mit $X \notin \mathcal{H} \cup h$, so wäre $X \in E\setminus(\mathcal{H} \cup h)$, d.h. in der anderen Halbebene.
Dann wäre $\overline{XQ} \cap h \neq \emptyset$ und zwar $\overline{XQ} \cap h = \{P\}$, da $g \cap h = \{P\}$.
Aus $P \in \overline{XQ}$ folgt wegen $P < Q$

$$X < P < Q \,.$$

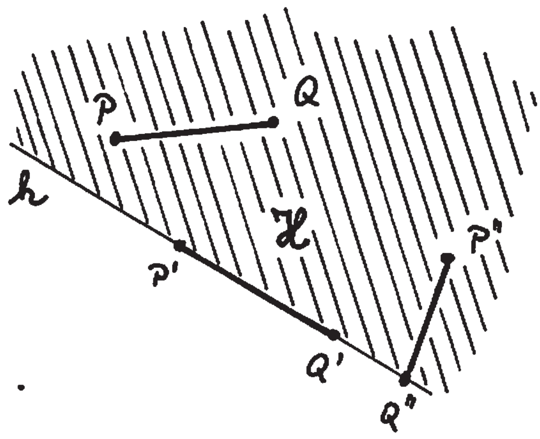
Aus $X \in \overrightarrow{PQ}$ folgt wegen $X \neq P$

$$P < X \,.$$

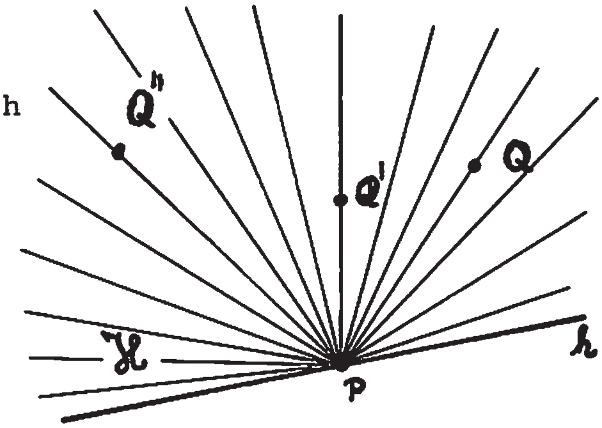
Daß ein Punkt von $\overrightarrow{PQ}$ nicht zu $\mathcal{H} \cup h$ gehört, führt demnach auf einen Widerspruch.
Umgekehrt kann kein nicht auf $\overrightarrow{PQ}$ gelegener Punkt von g zu $\mathcal{H} \cup h$ gehören, weil $g\setminus\overrightarrow{PQ} \subset E\setminus(\mathcal{H} \cup h)$ gilt, d.h. daß die andere Halbgerade von g zu der anderen abgeschlossenen Halbebene zu h gehört.
Den Beweis führt man wie oben. Der Fall $Q < P$ ist analog zum Fall $P < Q$ zu behandeln.

Aufgabe 2.2:

Jede abgeschlossene Halbebene $\mathcal{H} \cup h$ ist eine konvexe Menge. Man beweise diese Aussage.



Anl.: Man unterscheide die drei Fälle $P,Q \in \mathcal{H}$; $P,Q \in h$; $P \in \mathcal{H}$ und $Q \in h$.



Satz 2.7:

Jede abgeschlossene Halbebene $\mathcal{H} \cup h$ ist gleich der Vereinigung aller Halbgeraden, die von ein und demselben Punkt $P \in h$ ausgehen und einen weiteren Punkt Q von $\mathcal{H} \cup h$ enthalten:

$$\mathcal{H} \cup h = \bigcup_{Q \in \mathcal{H} \cup h \setminus \{P\}} \overrightarrow{PQ} \quad .$$

Beweis:

Ist g_1 eine Halbgerade von P aus, die $Q \in \mathcal{H}$ enthält, so ist g_1 in $\mathcal{H} \cup h$ enthalten (Satz 2.6).
Gilt $Q \in h$, so ist ebenfalls $g_1 \subset \mathcal{H} \cup h$.
Demnach ist die Vereinigung aller genannten Halbgeraden in $\mathcal{H} \cup h$ enthalten.

Umgekehrt liegt jeder Punkt $Q \in \mathcal{H} \cup h$ mit $Q \neq P$ auf einer solchen Halbgeraden, nämlich auf $\overrightarrow{PQ}$.

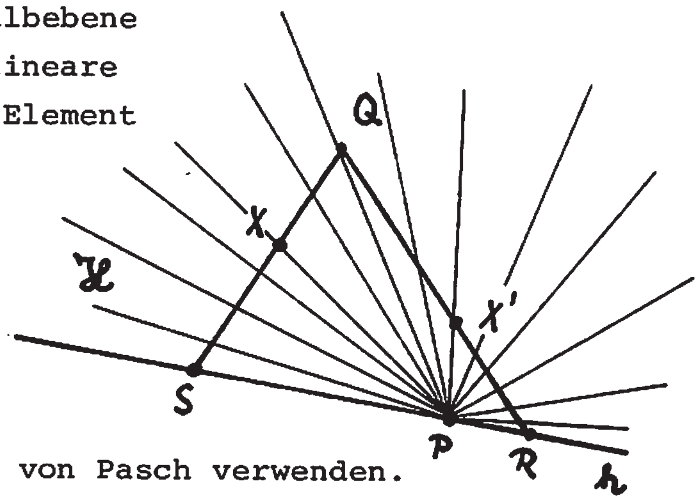
Damit sind beide Mengen gleich.

Satz 2.8:

Gegeben seien die abgeschlossene Halbebene $\mathcal{H} \cup h$ und in dieser drei nicht kollineare Punkte Q, R, S mit $\{R,S\} \subset h$ und P Element der offenen Strecke $\overline{RS}$ (Abb.).

Dann gilt

$$\mathcal{H} \cup h = \bigcup_{X \in \overline{RQ} \cup \overline{QS}} \overrightarrow{PX} \quad .$$



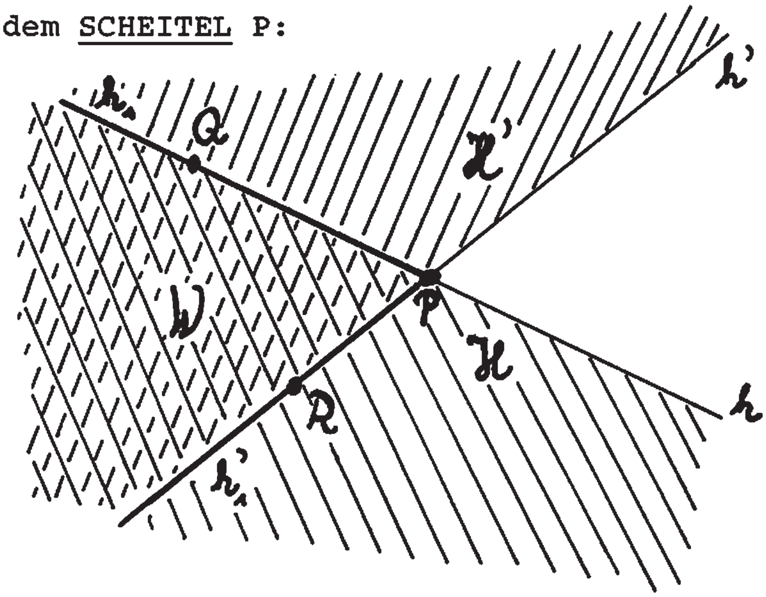
Beweishinweis: Es läßt sich der Satz von Pasch verwenden.

<u>Beweis von Satz 2.8</u>:

Mit $X \in \overline{RQ} \cup \overline{QS} \subset \mathcal{H} \cup h$ ist $\overrightarrow{PX} \subset \mathcal{H} \cup h$ für alle X, also auch die Vereinigung.
Sei nun $Y \in \mathcal{H} \cup h$ gegeben. Dann trifft die Gerade PY nach dem Satz von Pasch $\overline{RQ} \cup \overline{QS}$ in einem Punkt X. Damit gehört Y zu $\overrightarrow{PX}$, und $\mathcal{H} \cup h$ ist eine Teilmenge der Vereinigung.

<u>Definition 2.2</u>:

Den Durchschnitt zweier abgeschlossener Halbebenen, deren Ränder genau einen Punkt P gemeinsam haben, nennen wir ein (echtes) <u>WINKELFELD</u> $\mathcal{W}$ mit dem <u>SCHEITEL</u> P:



$\mathcal{W} = (\mathcal{H}' \cup h') \cap (\mathcal{H} \cup h)$

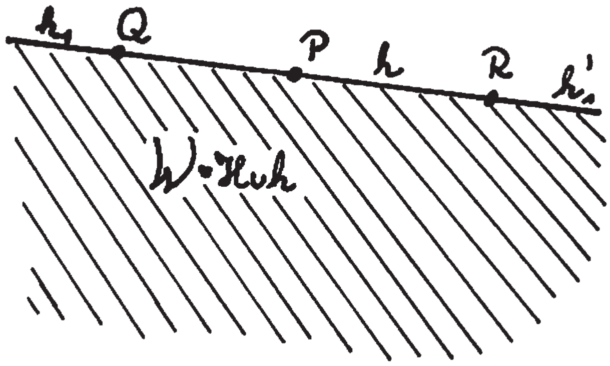
$\{P\} = h' \cap h$.

Die von P ausgehenden Halbgeraden

$h_1' = h' \cap (\mathcal{H} \cup h)$ und

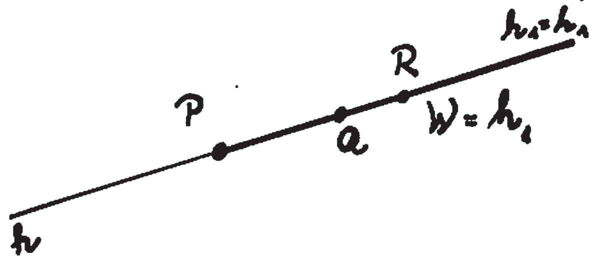
$h_1 := h \cap (\mathcal{H}' \cup h')$

heißen <u>SCHENKEL</u> des Winkelfeldes.



Eine abgeschlossene Halbebene mit ausgezeichnetem Randpunkt P heißt ein <u>GESTRECKTES WINKELFELD</u>; die Schenkel sind hier die beiden Halbgeraden, in die P den Rand zerlegt.

Fallen beide Schenkel zu einer Halbgeraden zusammen, so spricht man vom <u>NULLWINKELFELD</u>.



Man schreibt allgemein

$\mathcal{W} = \sphericalangle h_1 h_1' = \sphericalangle h_1' h_1$

bzw.

$\mathcal{W} = \sphericalangle QPR = \sphericalangle RPQ$,

wenn $h_1 = \overrightarrow{PQ}$, $h_1' = \overrightarrow{PR}$ gilt.

Man spricht
"<u>WINKELFELD $h_1 h_1'$</u>" bzw. "<u>WINKELFELD QPR</u>" .

Aufgabe 2.3:

Es seien g, h Geraden mit $g \cap h = \{S\}$ und g_1, h_1 Halbgeraden von g bzw. h mit S als Ausgangspunkt.

a) Zeigen Sie, daß es ein (echtes) Winkelfeld gibt, welches $g_1 \cup h_1$ als Rand besitzt.

b) Zeigen Sie, daß das Winkelfeld mit dem Rand $g_1 \cup h_1$ eindeutig bestimmt ist (indirekter Beweis).

Satz 2.9:

Jedes Winkelfeld ist eine konvexe Menge.

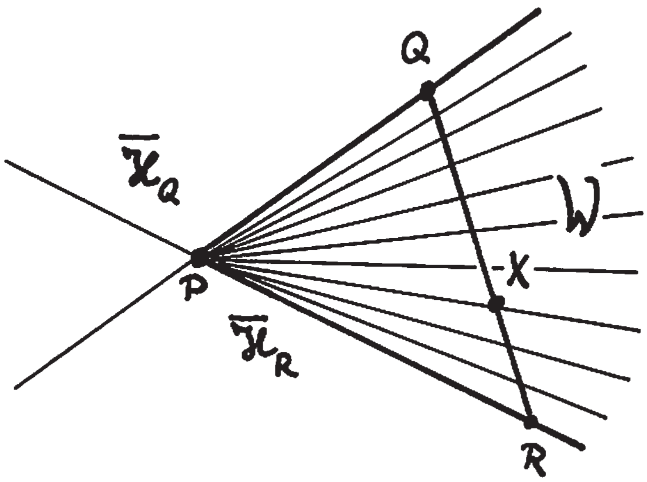
Beweis: Aufgabe.

Zur Einführung einer Winkelmaßfunktion, welche ähnlich der Abstandsfunktion die Eigenschaft der "Additivität" besitzen soll, benötigen wir einige vorbereitende Kenntnisse über das Zerlegen von Winkelfeldern durch Halbgeraden.

Satz 2.10:

$W = \sphericalangle QPR$ sei ein echtes *) Winkelfeld. Dann ist W die Vereinigung aller vom Scheitel P ausgehenden Halbgeraden, die mit der Strecke $\overline{QR}$ einen Punkt gemeinsam haben:

$$W = \bigcup_{X \in \overline{QR}} {}^{\vdash}\overline{PX} .$$



---

*) d.h. weder gestrecktes Winkelfeld noch Nullwinkelfeld.

<u>Beweis</u>:

$\overline{\mathcal{H}}_Q$ sei die abgeschlossene Halbebene zu PR, in der Q liegt,

$\overline{\mathcal{H}}_R$ analog zu PQ ;

dann ist $\mathcal{W} = \overline{\mathcal{H}}_Q \cap \overline{\mathcal{H}}_R$.

(a) $\overline{\mathcal{H}}_Q$ und $\overline{\mathcal{H}}_R$ sind konvex, also auch $\mathcal{W} = \overline{\mathcal{H}_Q} \cap \overline{\mathcal{H}_R}$, demnach gilt

$$\overline{QR} \subset \mathcal{W} .$$

Mit $X \in \overline{QR}$ ist $X \in \mathcal{W}$, und damit gilt

$$\overrightarrow{PX} \subset \mathcal{H}_Q \; ; \; \overrightarrow{PX} \subset \mathcal{H}_R$$

nach Satz 2.7.

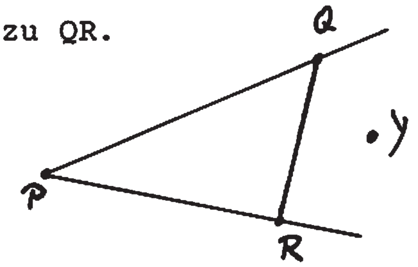
Also ist

$$\overrightarrow{PX} \subset \mathcal{W}$$

und damit

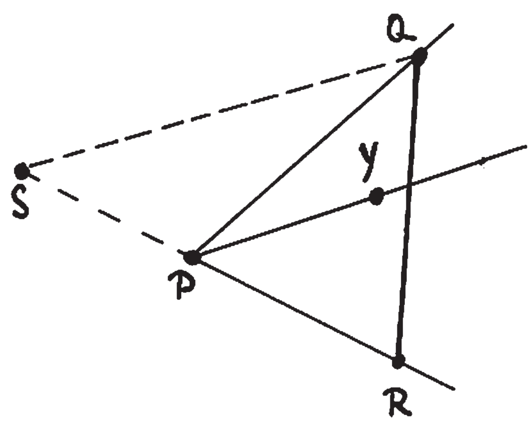
$$\bigcup_{X \in \overline{RQ}} \overrightarrow{PX} \subset \mathcal{W} .$$

(b) <u>1. Fall</u>: $Y \in \mathcal{W}$ und P liegen in verschiedenen Halbebenen zu QR.



Dann schneidet $\overline{PY}$ die Gerade QR, und zwar auf $\overline{QR}$, da $\overline{PY}$ und $\overline{QR}$ Teilmengen der konvexen Menge $\mathcal{W}$ sind.

<u>2. Fall</u>: $Y \in \mathcal{W}$ liegt in derselben Halbebene zu $\overline{QR}$ wie P.



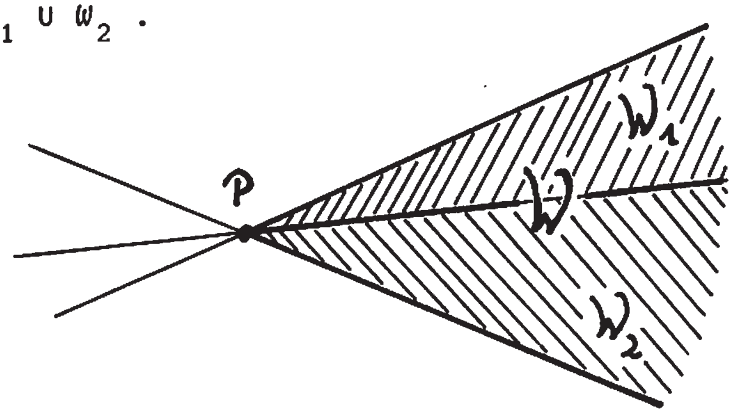
Dann muß der Strahl $\overrightarrow{PY}$ nach dem Satz von Pasch eine der Strecken $\overline{SQ}$ oder $\overline{QR}$ treffen (s. Abb.), und das muß $\overline{QR}$ sein, weil S und damit $\overline{SQ}$ in der anderen abgeschlossenen Halbebene zu $\overline{PQ}$ liegt wie Y und $\overline{QR}$ (S und R liegen auf verschiedenen Halbgeraden von PR).

Definition 2.3:

Das Winkelfeld $\mathcal{W}$ heißt in die Winkelfelder $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$ ZERLEGT, wenn gilt

(1) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ ist gemeinsamer Schenkel von $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$,

(2) $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$.

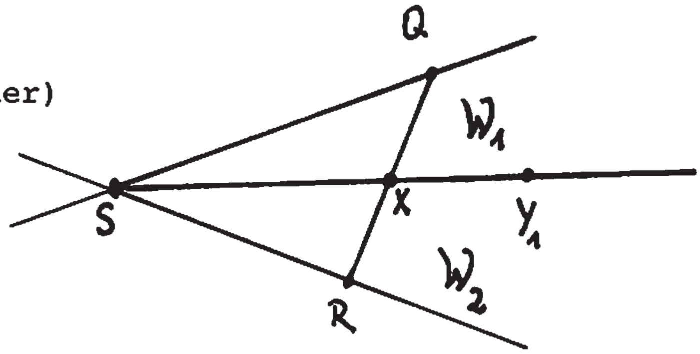


Satz 2.11:

Jedes Winkelfeld $\mathcal{W} = \sphericalangle QSR$ wird durch jede in $\mathcal{W}$ gelegene Halbgerade $\overrightarrow{SY_1}$ zerlegt.

Beweis:

(für echte Winkelfelder)



Nach dem Beweisteil (b) des Satzes 2.10 schneidet $\overrightarrow{SY_1}$ die Strecke $\overline{QR}$ in X:

$$\overrightarrow{SY_1} = \overrightarrow{SX} \quad .$$

$\{\sphericalangle QSX, \sphericalangle XSR\}$ ist eine Zerlegung von $\mathcal{W}$, denn es gilt

$$(1)\ \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 := \sphericalangle QSX \cup \sphericalangle XSR$$

$$= \bigcup_{Y \in \overline{QX}} \overrightarrow{SY} \cup \bigcup_{Y \in \overline{XR}} \overrightarrow{SY}$$

$$= \bigcup_{Y \in \overline{QR}} \overrightarrow{SY}$$

$$= \mathcal{W} \ .$$

$$(2)\quad \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \bigcup_{Y \in \overline{QX}} {}^{\vdash}\overline{SY} \cap \bigcup_{Y \in \overline{XR}} {}^{\vdash}\overline{SY}$$

$$= \bigcup_{Y \in \overline{QX} \cap \overline{XR}} {}^{\vdash}\overline{SY}$$

$$= \bigcup_{Y \in \{x\}} {}^{\vdash}\overline{SY} = {}^{\vdash}\overline{SX} = {}^{\vdash}\overline{SY}_1 \ .$$

Unter Verwendung von Satz 2.8 läßt sich der Beweis für gestreckte Winkelfelder modifizieren.

<u>AXIOM VII (WINKELMAßAXIOM)</u>:

Auf der Menge aller Winkelfelder in E,

$$\Omega := \{\mathcal{W} \mid \mathcal{W} \text{ Winkelfeld}\}_{P(E)},$$

ist eine <u>FUNKTION</u>

$$\underline{\omega : \Omega \to [0,180]}$$

mit folgenden Eigenschaften erklärt:

(1) <u>ADDITIVITÄT</u>,

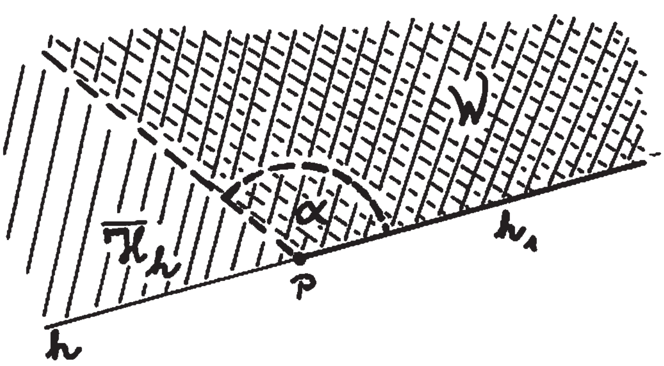
d.h. ist $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ eine Zerlegung, so gilt

$$\omega(\mathcal{W}) = \omega(\mathcal{W}_1) + \omega(\mathcal{W}_2) \ .$$

(2) <u>EINDEUTIGE ABTRAGBARKEIT DES WINKELFELDES</u>,

d.h. zu jeder Halbgeraden h_1 auf der Trägergeraden h der abgeschlossenen Halbebene $\overline{H}_h$ und zu jeder Zahl $\alpha \in [0,180]$ <u>gibt</u> es <u>genau ein</u> Winkelfeld $\mathcal{W} \subset \overline{H}_h$ mit dem Schenkel h_1 und

$$\omega(\mathcal{W}) = \alpha.$$



Die Funktion ω heißt
<u>WINKELMAßFUNKTION</u>,
die Zahl $\omega(\mathcal{W}) \in [0,180]$ heißt das <u>WINKELMAß</u> des Winkelfeldes $\mathcal{W}$.

<u>Bemerkung</u>: Anstelle des Bildintervalls $[0,180]$ wird als Winkelmaßintervall oft $[0,\pi]$ verwendet.
Die Wahl des Intervalls $[0,180]$ trägt der Verwendung des Winkelmessers im Schulunterricht Rechnung.

<u>Satz 2.12</u>:

Es gilt stets
$\omega(\mathcal{W}) = 0 \iff \mathcal{W}$ ist Nullwinkelfeld.

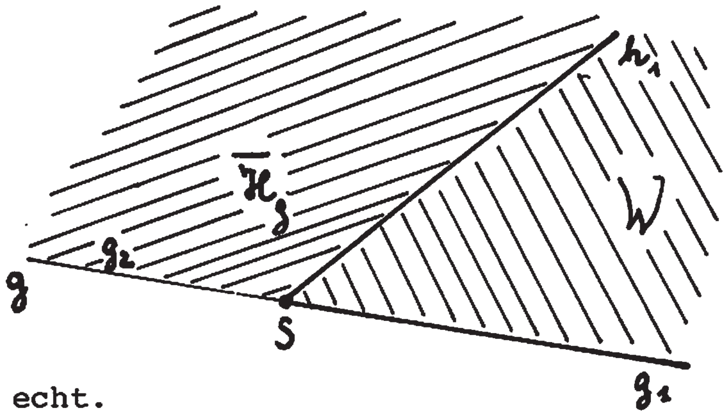
<u>Beweis</u>: Aufgabe

<u>Anl.</u>: Vgl. Satz 1.6 auf Seite 1.7.

<u>Satz 2.13</u>:

Ist $\mathcal{W}$ ein echtes Winkelfeld, so gilt $0 < \omega(\mathcal{W}) < 180$.

<u>Beweis</u>:



Sei $\sphericalangle h_1 g_1$ echt.
g_2 sei die andere Halbgerade zu g_1 auf der Trägergeraden g.
$\overline{H}_g$ sei die abgeschlossene Halbebene, in der h_1 liegt.
h_1 zerlegt $\overline{H}_g$ in zwei Winkelfelder mit positiven Maßen (nach Satz 2.12).
Aus

$$\omega(\overline{H}_g) = \underbrace{\omega(\sphericalangle g_1 h_1)}_{>0} + \underbrace{\omega(\sphericalangle h_1 g_2)}_{>0} \leq 180$$

folgt dann nach Ax. VII die Behauptung.

Definition 2.4:

W_1 und W_2 heißen NEBENWINKELFELDER, wenn sie eine Zerlegung eines gestreckten Winkelfeldes bilden.
Welches Winkelmaß haben die gestreckten Winkelfelder? Die Antwort liefert der folgende Satz:

Satz 2.14:

Alle und nur die gestreckten Winkelfelder haben das Winkelmaß 180.

Beweis:

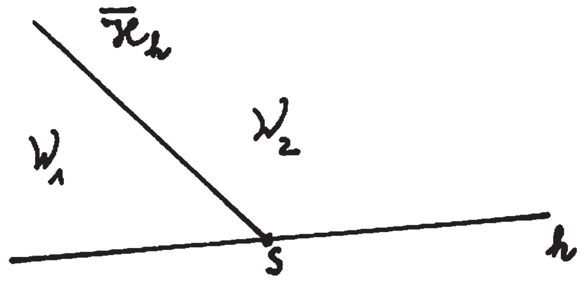
Zu zeigen ist: Wenn $\overline{H}$ ein gestrecktes Winkelfeld ist, so gilt $\omega(\overline{H}) = 180$.

Es sei h_1 ein Schenkel von $\overline{H}$. Für echte und Nullwinkelfelder W mit Schenkel h_1 ist $\omega(W) < 180$.

Nach Axiom VII, (2) existiert auch zu $180 \in [0, 180]$ ein Winkelfeld W^* in $\overline{H}$ mit dem Schenkel h_1; das muß dann aber, da sein Maß nicht unter 180 liegt, gestreckt sein.
Der zweite Schenkel ist demnach die andere Halbgerade auf der Trägergeraden von h_1.
Das bedeutet $W^* = \overline{H}$.

Folgerung 2.1:

Wegen der Additivität der Winkelmaßfunktion ist die Summe der Winkelmaße zweier Nebenwinkelfelder 180:

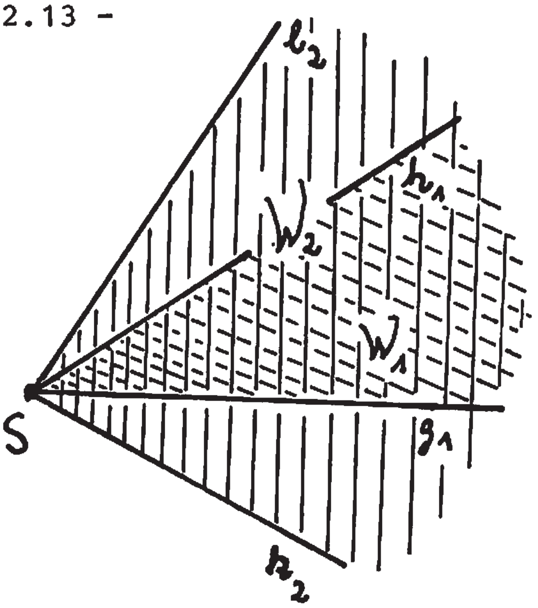


W_1, W_2 Nebenwinkelfelder $\Rightarrow \omega(W_1) + \omega(W_2) = 180$.

Satz 2.15 (MONOTONIESATZ):

S sei der Scheitel der Winkelfelder W_1 und W_2. Dann gilt

$$W_1 \subsetneqq W_2 \quad \Rightarrow \quad \omega(W_1) < \omega(W_2).$$



Beweis:

Es sei $W_1 = \sphericalangle g_1 h_1$,
$W_2 = \sphericalangle k_2 l_2$
h_1 zerlege das Winkelfeld W_2 in $\sphericalangle k_2 h_1$ und $\sphericalangle h_1 l_2$; o.B.d.A. zerlege g_1 das Winkelfeld $\sphericalangle k_2 h_1$ in $\sphericalangle k_2 g_1$ und $\sphericalangle g_1 h_1$.

Dann gilt wegen der Additivität von ω (Ax. VII, (1))

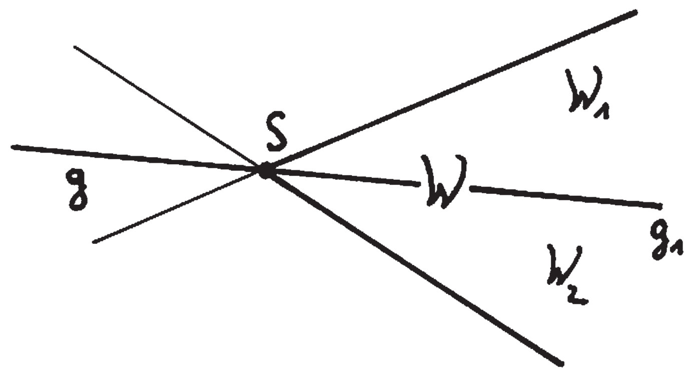
$$\begin{aligned} \omega(W_2) &= \omega(\sphericalangle k_2 h_1) + \omega(\sphericalangle h_1 l_2) \\ &= \omega(\sphericalangle k_2 g_1) + \omega(\underbrace{\sphericalangle g_1 h_1}_{= W_1}) + \omega(\sphericalangle h_1 l_2) \\ &> \omega(W_1) , \end{aligned}$$

da $\sphericalangle k_2 g_1$ und $\sphericalangle h_1 l_2$ nicht beide zugleich Nullwinkelfelder sein können (andernfalls wäre $W_1 = W_2$) .

Definition 2.5:

W sei ein Winkelfeld mit dem Scheitel S. Die Halbgerade g_1 mit dem Randpunkt S zerlege W in W_1 und W_2.

Die TRÄGERGERADE g von g_1 heißt WINKELHALBIERENDE von W, wenn gilt $\omega(W_1) = \omega(W_2)$.



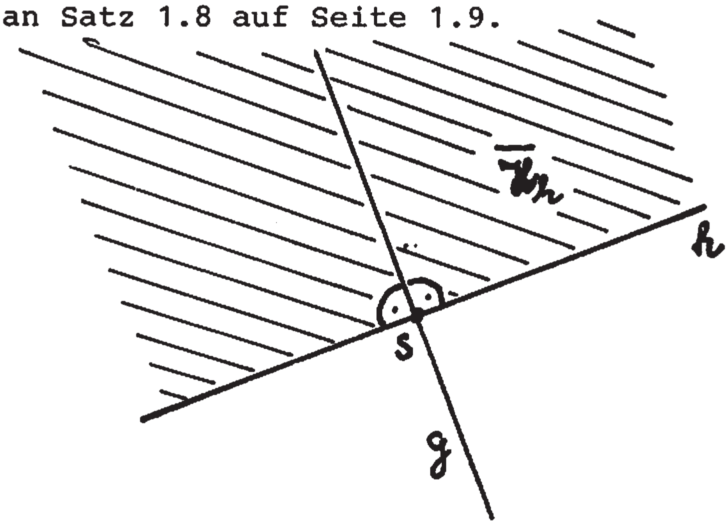
Aufgabe 2.4:

Man zeige, daß zu jedem Winkelfeld genau eine Winkelhalbierende existiert.

Anl.: Man orientiere sich an Satz 1.8 auf Seite 1.9.

Definition 2.6:

Die Winkelhalbierende g eines gestreckten Winkelfeldes $\overline{H}_h$ heißt SENKRECHTE zum Rand h im Scheitel S. Die Winkelfelder, in die $\overline{H}_h$ zerlegt wird, nennt man RECHTWINKELFELDER.

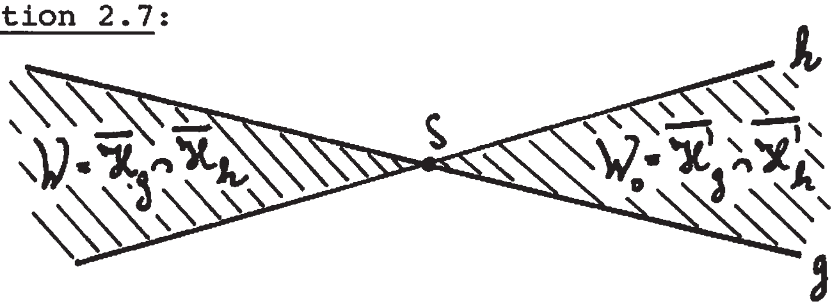


Bemerkung: Ist g Senkrechte zu h, so sagt man auch, g steht (in S) senkrecht auf h, und man schreibt $g \perp h$.
$\perp$ stellt in der Menge der Geraden eine symmetrische Relation dar.

Aufgabe 2.5:

Man zeige, daß das Winkelmaß jedes Rechtwinkelfeldes 90 ist.

Definition 2.7:



Ist $W = \overline{H}_g \cap \overline{H}_h$ ein echtes Winkelfeld, so heißt das durch die beiden anderen abgeschlossenen Halbebenen zu g, h gebildete Winkelfeld W_o das SCHEITELWINKELFELD zu W.

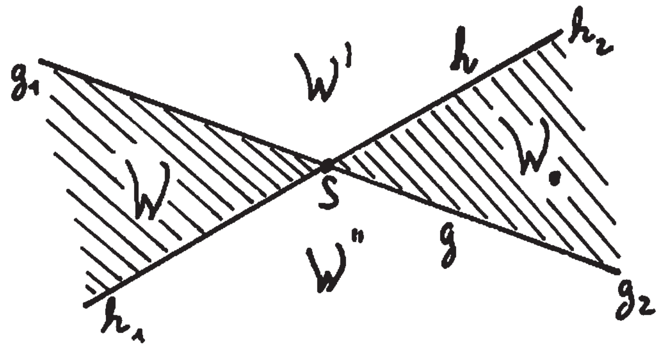
Aufgabe 2.6:

Ist g durch S in die Halbgeraden g_1, g_2 zerlegt, h durch S in die Halbgeraden h_1, h_2 , so sind $\sphericalangle g_1h_1$ und $\sphericalangle g_2h_2$ Scheitelwinkelfelder.

Satz 2.16:

Scheitelwinkelfelder besitzen dasselbe Winkelmaß.

Beweis: Aufgabe.



Aufgabe 2.7:

W und W_0 seien Scheitelwinkelfelder. Man zeige, daß die Winkelhalbierende von W auch Winkelhalbierende von W_0 ist. Verallgemeinern Sie diese Aussage für beliebige Geraden, die W vom Scheitel aus zerlegen.

Satz 2.4:

Ist $\mathcal{H}$ Halbebene zu h' und $\mathcal{H}$ Halbebene zu h^*, so gilt: $h' = h^*$.

Beweis (indirekt):

Angenommen, $h' \neq h^*$. Dann folgt: $h' \cap h^* = \emptyset$ oder $h' \cap h^* = \{S\}$.

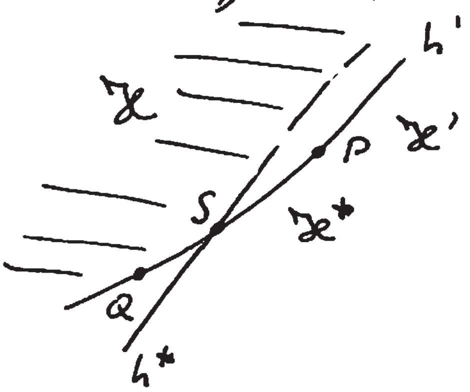
1. Fall: $h' \cap h^* = \{S\}$

Zunächst gilt: $\mathcal{E} = \mathcal{H} \cup h' \cup \mathcal{H}' = \mathcal{H} \cup h^* \cup \mathcal{H}^*$ und $\mathcal{H}'$ zweite Halbebene zu h', $\mathcal{H}^*$ zweite Halbebene zu h^*.

Wegen dem Halbebenenaxiom folgt also: $h' \cap \mathcal{H} = \emptyset$, $h^* \cap \mathcal{H} = \emptyset$

$\Rightarrow h' \subseteq h^* \cup \mathcal{H}^*$ und $h^* \subseteq h' \cup \mathcal{H}'$

Zu $S \in h'$ existieren nun (Streckenungsaxiom) zwei Punkte $P, Q \in h'$ mit $S \in \overline{PQ} \setminus \{P, Q\}$.



Wegen $h' \cap h^* = \{S\}$ folgt weiterhin: $P, Q \notin h^*$

$\Rightarrow P, Q \in \mathcal{E} \setminus (\mathcal{H} \cup h^*) = \mathcal{H}^*$

Da $\mathcal{H}^*$ konvex ist folgt aus $P, Q \in \mathcal{H}^*$ auch: $\overline{PQ} \subseteq \mathcal{H}^*$, d.h. $S \in \overline{PQ} \subseteq \mathcal{H}^*$ $\lightning$ ($S \in h^*$, d.h. $S \notin \mathcal{H}^*$!!)

Also haben wir einen Widerspruch bekommen, d.h.

$h' \cap h^* = \{S\}$ ist <u>nicht</u> möglich!

2. Fall: $h' \cap h^* = \emptyset$, d.h. $h' \parallel h^*$ mit $h' \neq h^*$.

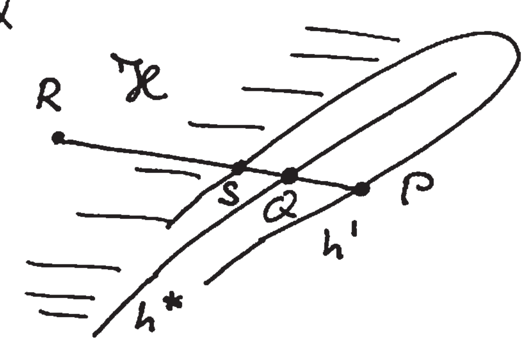
Es folgt mit $h' \subseteq h^* \cup \mathcal{H}^*$: $h' \subseteq \mathcal{H}^*$. Analog folgt mit $h^* \subseteq h' \cup \mathcal{H}'$: $h^* \subseteq \mathcal{H}'$. Wähle nun $R \in \mathcal{H}$ fest und $P \in h' \subseteq \mathcal{H}^*$.

Mit $R \in \mathcal{H}$, $P \in \mathcal{H}^*$ folgt nach dem Halbebenenaxiom:

$\overline{RP} \cap h^* = \{Q\}$ mit $Q \neq P$

Analog folgt:

$R \in \mathcal{H}$, $Q \in h^* \subseteq \mathcal{H}'$,



also wiederum nach dem Halbebenenaxiom, angewandt auf h':

$$\overline{QR} \cap h' = \{S\} \quad \text{mit} \quad S \neq Q \quad (\text{wegen } S \in h', Q \in h^* \text{ und } h' \cap h^* = \emptyset).$$

Es folgt nun insbesondere aufgrund der Lage: $S \neq P$.

Nach Inzidenzaxiom 2 gilt nun wegen $S, P \in h'$: $h' = SP$ und somit:

$$R \in SP = h' \quad \lightning \; (R \in \mathcal{H} \text{ und } \mathcal{H} \cap h' = \emptyset \text{ !!})$$

Also haben wir auch in diesem Fall einen Widerspruch erhalten, d.h.

$h' \cap h^* = \emptyset$ ist <u>nicht</u> möglich!

Somit bleibt alleine übrig: $\boxed{h' = h^*}$