ELEMENTARGEOMETRIE

Inhalt

1996

Stichwortverzeichnis

W

Z

EBENE EUKLIDISCHE GEOMETRIE

§1 Geraden, Punkte, Abstand

Gegebene Grundbegriffe der Geometrie sind

1. eine Menge $E \neq \emptyset$, EBENE genannt;
   die Elemente von E, PUNKTE genannt.
2. eine Menge $G \neq \emptyset$ von Teilmengen von E;
   die Elemente von G, die GERADEN heißen.

Das "Aussehen" der Grundbegriffe wird nicht beschrieben; man kann sie sich vorstellen wie man will.

Festgelegt werden nur die Beziehungen zwischen den Grundbegriffen, und zwar durch sogenannte AXIOME; das sind von vornherein als wahr anerkannte Aussagen, aus denen die Sätze der Geometrie durch logisches Schließen abgeleitet werden.

Das System der Axiome muß WIDERSPRUCHSFREI sein, d.h. es dürfen sich aus ihm nicht zwei einander widersprechende Sätze ableiten lassen. Das System sollte VOLLSTÄNDIG sein, d.h. man sollte aus ihm jeden wichtigen Satz der Geometrie ableiten können.
Das System kann im Idealfall UNABHÄNGIG sein, d.h. daß dann keines der Axiome aus den übrigen Axiomen des Systems herleitbar ist.

Wir wollen zunächst drei solche Axiome unserer Geometrie notieren.

AXIOM I (1. VERKNÜPFUNGSAXIOM):

Jeder Geraden gehören mindestens zwei (voneinander verschiedene) Punkte an.

AXIOM II (2. VERKNÜPFUNGSAXIOM):

Durch je zwei (voneinander verschiedene) Punkte von E geht genau eine Gerade von G.

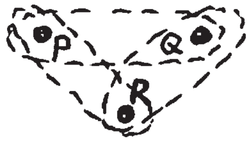
AXIOM III (3. VERKNÜPFUNGSAXIOM):

Es gibt drei nicht auf ein und derselben Geraden gelegene Punkte in E.

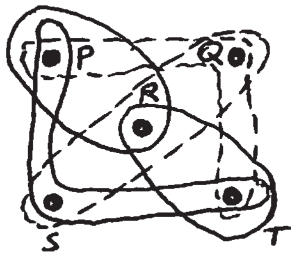
<u>Modelle</u> einer Geometrie sind Mengen von Objekten, die sich als Grundbegriffe interpretieren lassen und die den Axiomen genügen.

Nach dem, was wir bisher über unsere Geometrie gesagt haben, prüfe man, ob die nachfolgend angegebenen Systeme als Modelle geeignet sind.

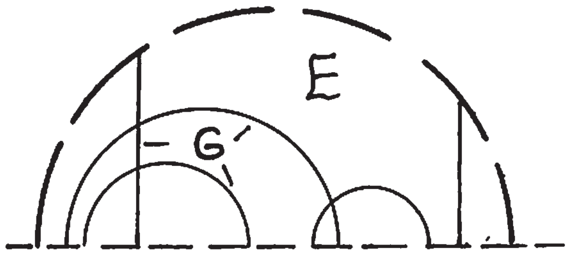
(a) $\{P,Q,R\} = E$
$\{\{P,Q\},\{Q,R\},\{R,P\}\} = G$



(b) $\{P,Q,R,S,T\} = E$
$\{\{P,Q,T\},\{P,R\},\{P,S,T\},\{Q,R,S\},\{R,T\}\} = G$

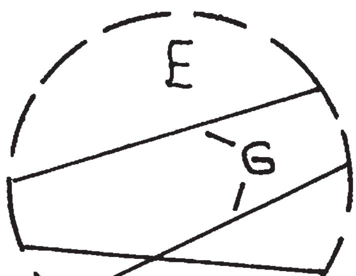


(c) E = Punktmenge des Innern eines Halbkreises
G = Menge aller auf dem Durchmesser des Halbkreises senkrecht stehenden Halbkreise und Halbsehnen in E.



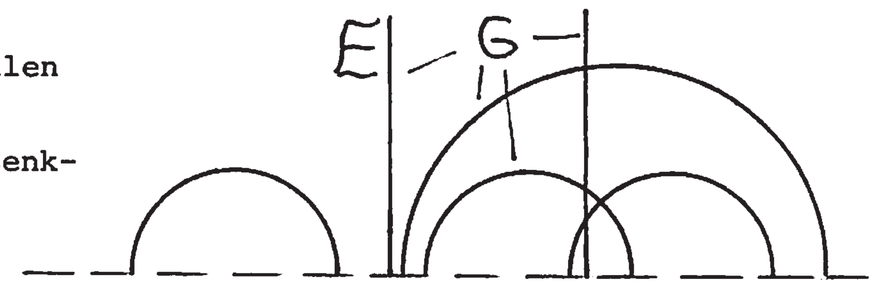
(d) E = Punktmenge eines Kreisinneren

G = Menge aller (offenen) Sehnen des Kreises

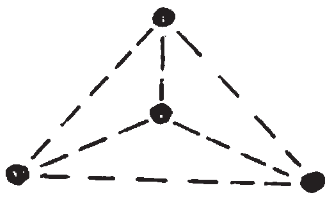


(e) E = "Randlose" Zeichenhalbebene

G = Menge aller Strahlen und Halbkreise in E, die auf dem "Rande" senkrecht stehen.



(f) System der (rechts) gezeichneten 4 Punkte ($\mathcal{E}$) und der 6 Punktepaare - durch Strichelung hervorgehoben - ($\mathcal{G}$).



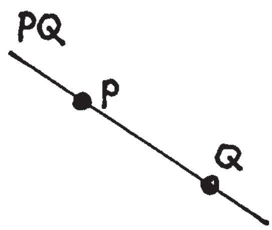
<u>Bemerkung:</u> Eine Geometrie, die den Axiomen I - III genügt, heißt <u>EBENE INZIDENZGEOMETRIE</u>.

<u>Satz 1.1</u>:

Jede Gerade aus $\mathcal{G}$ ist eine <u>echte</u> Teilmenge von $\mathcal{E}$.

<u>Beweis</u>: Aufgabe

<u>Definition 1.1</u>:



Die durch zwei voneinander verschiedene Punkte $P,Q \in \mathcal{E}$ (nach AX.II) eindeutig bestimmte Gerade heißt <u>VERBINDUNGSGERADE</u> PQ.

<u>Satz 1.2</u>:

$\mathcal{E}$ enthält mindestens 3 voneinander verschiedene Geraden.

<u>Beweis</u>: Aufgabe

<u>Satz 1.3</u>:

Zwei voneinander verschiedene Geraden $g,h \in \mathcal{G}$ besitzen höchstens einen gemeinsamen Punkt S:

$$\bigwedge_{g \in \mathcal{G}} \bigwedge_{h \in \mathcal{G}} g \neq h \longrightarrow \Big(g \cap h = \emptyset \ \vee \bigvee_{S \in \mathcal{E}} g \cap h = \{S\}\Big)$$

<u>Beweis</u> (indirekt): Aufgabe

<u>Folgerung</u>: Für zwei Geraden g,h gilt stets genau eine der drei Möglichkeiten

a) $g \cap h = \emptyset$ b) $g \cap h = \{S\}$ c) $g = h$

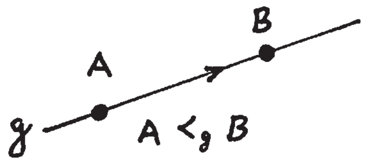
<u>Def. 1.2</u>: S heißt <u>SCHNITTPUNKT</u> der beiden Geraden g,h, wenn diese genau den Punkt S gemeinsam haben, d.h. wenn <u>$g \cap h = \{S\}$</u> gilt.

<u>Def. 1.3</u>: Die Gerade g heißt <u>PARALLEL</u> zur Geraden h (in Zeichen: $g \| h$), wenn $g \cap h = \emptyset$ oder $g = h$ gilt.

<u>Satz 1.4</u>: Die Relation $\|$ ist auf G reflexiv und symmetrisch.

<u>Beweis</u>: Aufgabe

<u>AXIOM IV (ANORDNUNGSAXIOM)</u>:



Auf jeder Geraden $g \in G$ existiert eine lineare, strenge Ordnungsrelation $<_g$. Das Zeichen $<_g$ wird "liegt vor" gesprochen.

<u>Satz 1.5</u>: Ist $g \in G$, so wird durch

$$\bigwedge_{A \in g} \bigwedge_{B \in g} A >_g B \leftrightarrow B <_g A$$

eine weitere lineare, strenge Ordnungsrelation auf g definiert.

<u>Beweis</u>: Aufgabe

<u>Bemerkung</u>: Wir setzen fest:

$$\bigwedge_{g \in G} \bigwedge_{A \in g} \bigwedge_{B \in g} A \leq_g B \leftrightarrow A <_g B \vee A = B.$$

Auf diese Weise wird eine konnexe Ordnungsrelation auf g definiert. Wenn keine Mißverständnisse möglich sind, scheiben wir einfach $<$ bzw $\leq$ für $<_g$ bzw. $\leq_g$.

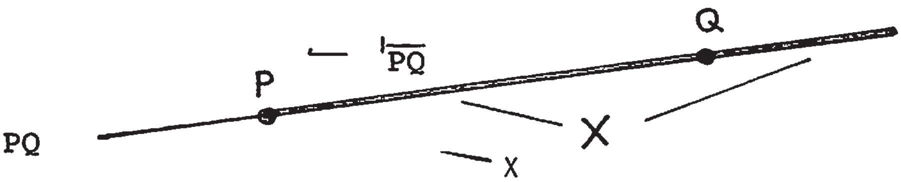
<u>Def. 1.4</u>: Unter der <u>Strecke</u> $\overline{PQ}$ versteht man die Menge

$$\overline{PQ} := \{X \mid P \leq X \leq Q \vee Q \leq X \leq P\}_{PQ} \quad .$$

<u>Def. 1.5</u>: Sind $P \neq Q$ Punkte in E, so versteht man unter der <u>Halbgeraden</u> (dem <u>Strahl</u>) mit dem Ausgangspunkt P die Punktmenge

$$^{\shortmid}\overline{PQ} := \{X \mid X \in \overline{PQ} \vee Q \in \overline{PX}\}_{PQ}$$

. <u>Bemerkung:</u> Im Falle $P \prec Q$ kann man $^{\shortmid}\overline{PQ}$ auch so schreiben: $X\}_{PQ}$; alle $Q \prec P$ so: $P\}_{PQ}$.)



<u>AXIOM V (STRECKENMAẞAXIOM)</u>:

Es gibt eine Funktion

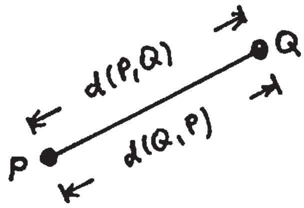
$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

mit folgenden Eigenschaften:

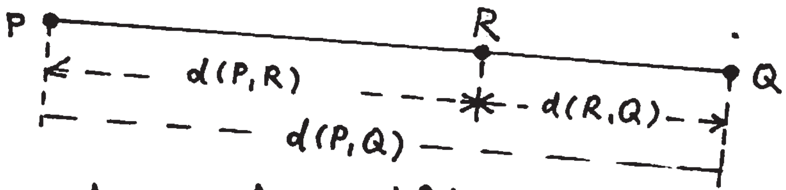
(1) Symmetrie
(2) Additivität
(3) Eindeutige Abtragbarkeit

Dabei bedeutet

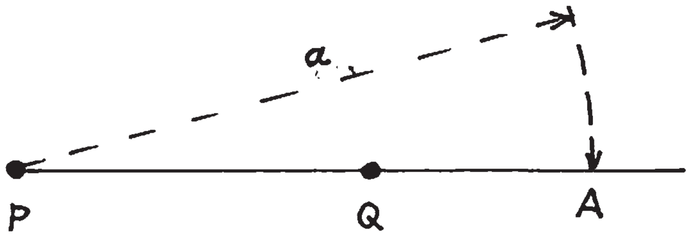
(1) $\bigwedge\limits_{P \in E} \bigwedge\limits_{Q \in E} d(P,Q) = d(Q,P)$



(2) $\bigwedge\limits_{\overline{PQ} \subset E} \bigwedge\limits_{R \in \overline{PQ}} d(P,Q) = d(P,R) + d(R,Q)$



(3) $\bigwedge\limits_{^{\shortmid}\overline{PQ} \subset E} \bigwedge\limits_{a \in \mathbb{R}_0^+} \dot{\bigvee\limits_{A \in {}^{\shortmid}\overline{PQ}}} d(P,A) = a$



BEMERKUNG:

(3) besagt, daß es auf jeder von P ausgehenden Halbgeraden in jeder Entfernung GENAU einen Punkt gibt (keine Lücken und Eindeutigkeit).
Welche der Modelle a) - f) auf den Seiten 1.2 und 1.3 sind damit hinfällig?

Bemerkung: Die Funktion d heißt auch METRIK, ABSTANDSFUNKTION, ENTFERNUNGSFUNKTION; entsprechend nennt man d(P,Q) den Abstand oder die ENTFERNUNG der Punkte P und Q.

Die Abstandsfunktion rechtfertigt die Verwendung des Zentimetermaßes in der üblichen Zeichenebene.

Definition 1.6:

Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und

$$d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion mit den Eigenschaften

(I) $\bigwedge_{P \in M} \bigwedge_{Q \in M} d(P,Q) = 0 \iff P = Q$

(II) $\bigwedge_{P \in M} \bigwedge_{Q \in M} d(P,Q) = d(Q,P)$

(III) $\bigwedge_{P \in M} \bigwedge_{Q \in M} \bigwedge_{R \in M} d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$.

Dann heißt d eine Metrik in M und das Paar (M,d) ein METRISCHER Raum.

Bemerkung: Die im Streckenmaßaxiom genannte Funktion hat die Eigenschaften (I) - (III) einer Metrik. (III) können wir aber erst beweisen, wenn wir unsere Geometrie weiter entwickelt haben.

Aufgabe 1.1:

a) M sei eine Teilmenge des dreidimensionalen Anschauungsraumes, in der je zwei verschiedene Punkte den Abstand 1m haben. Wieviel Punkte kann M maximal enthalten, und wie liegen sie zueinander?

b) Formulieren Sie das entsprechende mathematische Problem, nachdem Sie einen passenden metrischen Raum gewählt haben.

Aufgabe 1.2:

Zeigen Sie, daß $(\mathbb{R}^3, d')$ ein metrischer Raum ist, wenn man für $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ die Entfernung durch

$$d(x,y) = \sum_{v=1}^{3} |x_v - y_v| \text{ festsetzt.}$$

Aufgabe 1.3:

Gegeben sei die Menge $\mathbb{R}^3$ und die Funktion

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } \bigwedge_{x \in \mathbb{R}^3} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}^3} d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}.$$

Man zeige, daß (R^3, d) ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 1.4:

Beweisen Sie, daß die drei Metrikaxiome voneinander unabhängig sind.

Satz 1.6:

Die im Streckenmaßaxiom eingeführte Funktion d erfüllt die erste Metrikeigenschaft (I)

$$\bigwedge_{P \in E} \bigwedge_{Q \in E} d(P,Q) = 0 \longleftrightarrow P = Q$$

Beweis:

(a) Sei P = Q. Dann gilt wegen der Additivität von d mit $P = Q = R$

$$d(P,P) = d(P,P) + d(P,P)$$
$$0 = d(P,P)$$
$$0 = d(P,Q) .$$

(b) Sei $d(P,Q) = 0$.

Ist $Q = P$, so ist alles klar.

Ist $Q \neq P$, so betrachten wir $\overleftarrow{PQ}$.

Nun ist stets $d(P,P) = 0$.

Da die Entfernung 0 von P aus nach dem Streckenabtrageaxiom genau einem Punkt auf $\overleftarrow{PQ}$ zukommt, muß $Q = P$ sein: Widerspruch!

<u>Satz 1.7:</u>

Zu jedem Punkt P einer Geraden g gibt es zwei und nur zwei von P ausgehende Halbgeraden g_1, g_2 auf g mit

$$g_1 \cup g_2 = g \quad \text{und} \quad g_1 \cap g_2 = \{P\} \ .$$

<u>Beweis:</u>

Zu $P \in g$ existiert ein Punkt $Q \in g$ (AX. I, S. 1.1) und es kann o.E.d.A. $P < Q$ angenommen werden.
Auf $\overrightarrow{QP}$ tragen wir $2d(Q,P)$ ab und erhalten einen Punkt $Q' < P$:

Denn wäre

$$P \leqslant Q' < Q \ ,$$

so auch

$$d(P,Q') + d(Q',Q) = d(P,Q) \ ,$$

was $d(Q',Q) = 2d(P,Q)$ widerspricht.

Die gesuchten Halbgeraden sind nun

$$g_1 := \overrightarrow{PQ} \quad \text{und} \quad g_2 := \overrightarrow{PQ'} \ .$$

Für sie gilt

$$g_1 \cap g_2 = \overrightarrow{PQ} \cap \overrightarrow{PQ'} = \{X \mid P \leqslant X \wedge X \leqslant P\}_g = \{P\}$$

$$g_1 \cup g_2 = \overrightarrow{PQ} \cup \overrightarrow{PQ'} = \{X \mid P \leqslant X \vee X \leqslant P\}_g = g$$

Für jede weitere von P ausgehende Halbgerade $\overrightarrow{PR}$ auf g gilt

a) im Falle $P <_g R$ wegen (vgl. Def. 1.5)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= \{X \mid X \in \overline{PR} \vee R \in \overline{PX}\}_g \\ &= \{X \mid P \leqslant X \leqslant R \vee P \leqslant R \leqslant X\}_g \\ &= \{X \mid P \leqslant X\}_g \ , \end{aligned}$$

d.h. $\overrightarrow{PR} = g_1$;

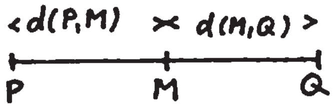
b) im Falle $R <_g P$

$$\overrightarrow{PR} = g_2 \ .$$

<u>Definition 1.7</u>:

Der Punkt $M \in \overline{PQ}$ heißt Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$, wenn

$$d(P,M) = d(M,Q)$$



gilt.

<u>Satz 1.8</u>:

Jede Strecke besitzt <u>genau</u> einen Mittelpunkt.

<u>Beweis</u>: Für $P = Q$ ist alles klar.
Sei $\overline{PQ}$ die Strecke im Falle $P \neq Q$. Wir wählen auf der Geraden PQ den Strahl $\overrightarrow{PQ}$ und tragen von P aus $\frac{1}{2} d(P,Q)$ ab: Wir erhalten einen Punkt M.
Wegen $d(P,M) < d(P,Q)$ kann nicht $P \leq Q < M$ sein, also gilt $P \leq M \leq Q$.
Aus

$$d(P,Q) = d(P,M) + d(M,Q)$$

folgt mit $d(P,M) = \frac{1}{2} d(P,Q)$

$$\frac{1}{2} d(P,Q) = d(M,Q) \ .$$

Also ist M ein Mittelpunkt.

Da jeder weitere Mittelpunkt M' die Gleichung

$$d(P,Q) = d(P,M') + d(M',Q)$$

mit

$$d(P,M') = d(M',Q)$$

erfüllen muß, ergibt sich auch

$$d(P,M') = \frac{1}{2} d(P,Q)$$

und damit $M = M'$.

Definition 1.8:

g sei eine Gerade und < eine lineare, strenge Ordnung auf g. Dann heißt das Paar (g,<) eine ORIENTIERTE GERADE.

Wir wollen auf g Koordinaten einführen, d.h. (g,<) bijektiv und ordnungstreu auf die geordnete Menge der reellen Zahlen, ($\mathbb{R}$,<), abbilden. Wie das geht, zeigen wir im nächsten Satz.

Satz 1.9:

(g,<) sei eine orientierte Gerade und $\mathcal{O}$ ein beliebiger Punkt auf g.
Dann ist durch

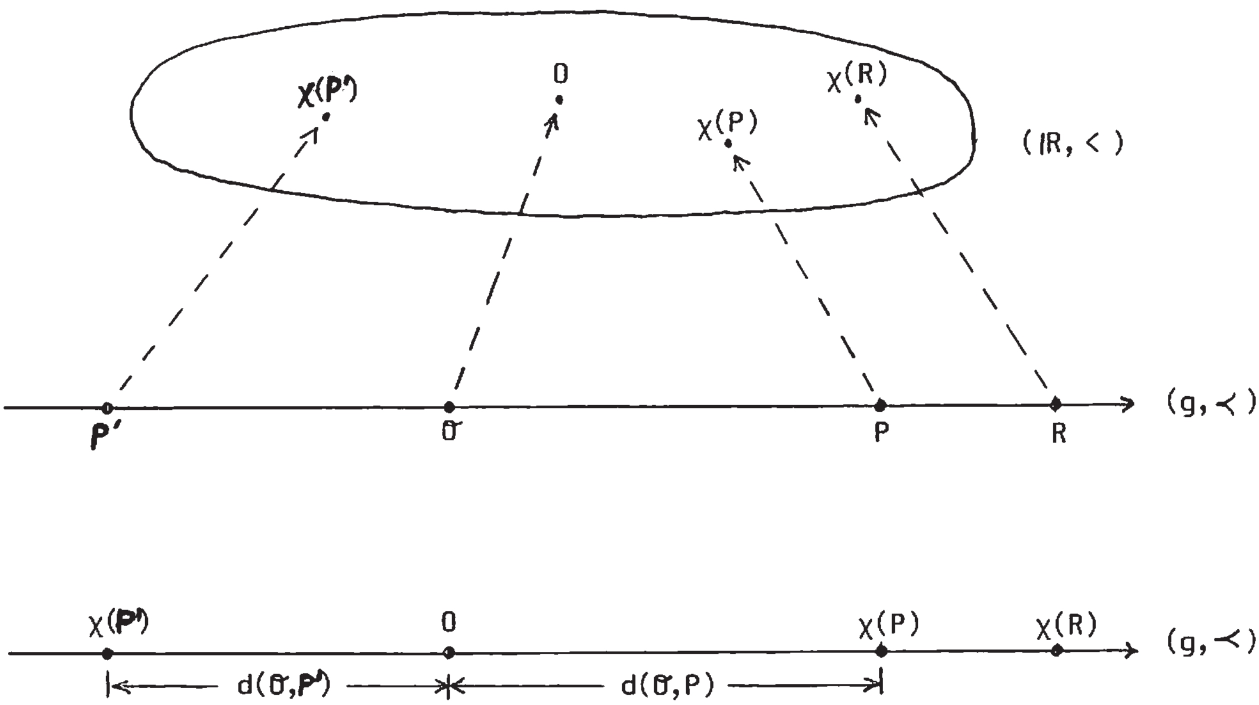
$$\chi : g \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \chi(P) = \begin{cases} d(\mathcal{O},P), & \text{falls } \mathcal{O} \leq P \\ -d(\mathcal{O},P), & \text{falls } P < \mathcal{O} \end{cases}$$

eine BIJEKTIVE ABBILDUNG mit folgenden Eigenschaften bestimmt:

(1) $\chi(\mathcal{O}) = 0$

(2) $|\chi(P) - \chi(R)| = d(P,R)$

(3) $\chi(P) < \chi(R) \iff P < R$



Beweis:

(0) χ ist injektiv, wenn

$$\bigwedge_{P \in g} \bigwedge_{R \in g} P \neq R \longrightarrow \chi(P) \neq \chi(R)$$

gilt.
Wir unterscheiden die drei Hauptfälle

(a) $P < R < \mho$, (b) $P < \mho < R$, (c) $\mho < P < R$.

(a): Hier ist

$d(P,\mho) = d(P,R) + d(R,\mho)$

mit $d(P,R) > 0$.
Daraus folgt

$\chi(P) = -d(P,\mho) < -d(R,\mho) = \chi(R)$.

(b),(c): Aufgabe.

χ ist surjektiv, wenn

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigvee_{P \in g} \chi(P) = x$$

gilt.
Wir unterscheiden die zwei Fälle

(a) $x < 0$, (b) $0 \leq x$.

(a): Wir wählen auf g die durch $\mho$ bestimmte Halbgerade

$$g_1 := \{X \mid X \lesssim \mho\}_g \; .$$

Auf dieser tragen wir $-x > 0$ ab und erhalten einen Punkt $P < \mho$ mit

$$d(\mho,P) = -x.$$

Dieser ist das gesuchte Urbild, denn es gilt

$$\chi(P) = -d(\mho,P) = x.$$

(b): Aufgabe.

(1) $\chi(\mho) = d(\mho,\mho) = 0$

(2) Wir unterscheiden die drei Fälle
(a) $P \lesssim R \lesssim \mho$, (b) $P \lesssim \mho \lesssim R$, (c) $\mho \lesssim P \lesssim R$.

(a): Hier gilt:

$$\begin{aligned} d(P,R) + d(R,\mathcal{O}) &= d(P,\mathcal{O}) \\ d(P,R) &= d(P,\mathcal{O}) - d(R,\mathcal{O}) \\ &= -\chi(P) + \chi(R) \\ &= |\chi(P) - \chi(R)| \; . \end{aligned}$$

(b),(c): Aufgabe

(3) Die Aussage $P < R \Longrightarrow \chi(P) < \chi(R)$ wurde schon im Rahmen des Injektivitätsnachweises begründet.

Aus $\chi(P) < \chi(R)$ kann aber nicht $R \lesssim P$ folgen, weil das $\chi(R) \leq \chi(P)$ im Widerspruch zur Voraussetzung nach sich zöge . Demnach gilt auch die Umkehrung.

<u>Satz 1.10</u>:

Es sei χ die gemäß Satz 1.9 definierte Funktion.
Man zeige: Jede Abbildung

$$\chi^* : g \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften (1),(2),(3) gemäß Satz 9 ist mit χ identisch.

<u>Beweis</u>: Aufgabe.

Anl: Es ist nachzuweisen, daß χ^* in jedem Punkt von g denselben Wert wie χ hat.

<u>Definition 1.9</u>:

Die Funktion χ heißt <u>KOORDINATENFUNKTION</u> der orientierten Geraden $(g,<)$ bezüglich des Koordinatenursprungs $\mathcal{O} \in g$. χ bildet $(g,<)$ und $(\mathbb{R},<)$ <u>ähnlich</u> aufeinander ab.

<u>Definition 1.10</u>:

Sind $(M,<_M)$ und $(N,<_N)$ streng linear geordnete Mengen und ist $\chi : M \longrightarrow N$ eine Bijektion mit der Eigenschaft

$$\bigwedge_{m_1 \in M} \bigwedge_{m_2 \in M} m_1 <_M m_2 \longrightarrow \chi(m_1) <_N \chi(m_2) \; ,$$

so heißen M und N einander <u>ähnlich</u> geordnet.

Ähnliche Abbildungen spielen in der Ordnungstheorie die gleiche Rolle wie etwa isomorphe Abbildungen in der Gruppentheorie oder homöomorphe Abbildungen in der Topologie. Infolge der Ähnlichkeit kann man die Ordnungsstrukturen $(g,<)$ und $(\mathbb{R},<)$ identifizieren, indem man jedem Punkt $P \in g$ die Zahl $\chi(P) \in \mathbb{R}$ - seine Koordinate - zuordnet. Das bedeutet, daß man die Elemente einer orientierten Geraden bei fest gewähltem Koordinatenursprung als Zahlen auffassen und damit die Gerade als Zahlengerade deuten und behandeln kann.
Folgende Eigenschaften einer Geraden g ergeben sich dann unmittelbar aus dem entsprechenden Eigenschaften von $\mathbb{R}$:

<u>Satz 1.11</u>:

(1) Jede Gerade g besitzt <u>unendlich</u> viele Punkte.
(2) g ist <u>dicht</u> geordnet, d.h. zu je zwei Punkten $P,Q \in g$ mit $P < Q$ existiert (mindestens) ein Punkt $Z \in g$ mit $P < Z < Q$.
(3) g besitzt kein erstes und kein letztes Element, d.h. zu jedem $P \in g$ gibt es Elemente Q,R in g mit $Q < P$ und $P < R$.

<u>Definition 1.11</u>:

Drei oder mehr Punkte, die auf ein und derselben Geraden liegen, heißen <u>KOLLINEAR</u>.

<u>Aufgabe 5</u>: Man zeige, daß gilt:

$$\overleftarrow{AB} = \overleftarrow{CD} \implies A = C.$$

Anleitung: Man setze o.B.d.A. $A < B$ voraus.
a) Man begründe $A \lesssim C \wedge A \lesssim D$.
b) Man begründe, daß $A < C$ unverträglich mit $C < D$ ist.
c) Man begründe, daß $A < C$ unverträglich mit $D < C$ ist (weil dann $\overleftarrow{CD}$ einen Punkt besitzt, der nicht auf $\overleftarrow{AB}$ liegt. Wo liegt dieser, und wie findet man ihn? Hinweis: Streckenmaßaxiom!).
d) Warum ist $A < C$ mit $D = C$ ausgeschlossen?

Aufgabe 6: Man beweise:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Longrightarrow A = C \ \text{ und } \ B = D \ \text{ oder}$$
$$A = D \ \text{ und } \ B = C\ .$$

Aufgabe 7: Man zeige, daß aus

$\overline{PQ} \subset \overline{RS}$ stets $d(P,Q) \leq d(R,S)$ folgt.

Anl.: Man setze o.E.d.A. $P \preccurlyeq Q$, $R \preccurlyeq S$ voraus.

Aufgabe 8: Man zeige:

$$\bigwedge_{\{P,Q,R\} \subset \mathcal{E}} \{P,Q,R\} \subset g \Longrightarrow P \in \overline{QR} \vee Q \in \overline{PR} \vee R \in \overline{PQ}$$

a) Zuerst folgere man aus

$R \notin \overline{PQ}$, daß $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ}$ gilt.

b) Dann beachte man die Definition der Halbgeraden mit Hilfe von Strecken.

Aufgabe 9: Man beweise:

$$\bigwedge_{\{P,Q,R\} \subset \mathcal{E}} \{P,Q,R\} \subset g \longrightarrow d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)\ .$$

Anleitung: Man kann die Aussage der vorangehenden Aufgabe verwenden.

Aufgabe 10: Eine räumliche INZIDENZGEOMETRIE ist eine Menge $\mathcal{E} \neq \emptyset$ (der Raum), deren Elemente Punkte heißen und von der gewisse Teilmengen Geraden bzw. Ebenen genannt werden und die folgenden Axiomen genügt:

Ax INZ 1: Jeder Geraden gehören mindestens zwei (voneinander verschiedene) Punkte an.

Ax INZ 2: Durch je zwei (voneinander verschiedene) Punkte von $\mathcal{E}$ geht genau eine Gerade.

Ax INZ 3: Zu jeder Ebene $E \subset \mathcal{E}$ gehören mindestens drei nicht in ein und derselben Geraden gelegene Punkte.

Ax INZ 4: Durch je drei nicht kollineare Punkte von E geht genau eine Ebene.

Ax INZ 5: Wenn zwei Punkte einer Geraden g einer Ebene E angehören, dann ist g eine Teilmenge von E.

Ax INZ 6: Wenn ein Punkt zu zwei Ebenen gehört, so gibt es mindestens noch einen Punkt, der zu diesen beiden Ebenen gehört.

Ax INZ 7: Es gibt (mindestens) vier Punkte, die nicht in ein und derselben Ebene liegen.

Man beweise:

(1) Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen gemeinsamen Punkt.

(2) Zwei verschiedenen Ebenen ist entweder kein Punkt oder eine ganze Gerade gemeinsam.

(3) Eine Ebene und eine nicht in ihr gelegene Gerade haben höchstens einen gemeinsamen Punkt.

(4) Zu jeder Geraden g und jedem nicht auf g gelegenen Punkt P existiert genau eine Ebene, die P und alle Punkte von g enthält.

(5) Es gibt genau eine Ebene, der alle Punkte von zwei sich schneidenden Geraden angehören.