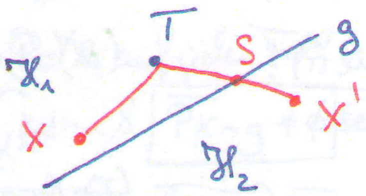
Zum Skript, S. 23:

Aufgabe 19: Man beweise, daß das Halbebenenaxiom aus dem Satz von Pasch (Satz 2.5) folgt.

Beweis: (a) Existenz der HEn H_1, H_2 zu g:

Wenn $g \in \mathcal{G}$ gegeben ist, betrachte man $T \in \mathcal{E} \setminus g$. Die Existenz von T folgt aus Inzidenzaxiom (III). Wir definieren:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &:= \{X \in \mathcal{E}\setminus g \mid \overline{TX} \cap g = \emptyset\}, \\ \mathcal{H}_2 &:= \mathcal{E}\setminus(g \cup \mathcal{H}_1) = \{X \in \mathcal{E}\setminus g \mid \overline{TX} \cap g \neq \emptyset\} \end{aligned}}$$



Ü(a)

Wir wollen die im Axiom (VI) geforderten Eigenschaften für $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ nachweisen. Wir beginnen mit

(2) $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 = \mathcal{E}\setminus g$, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$:

Für jeden Punkt $X \in \mathcal{E}\setminus g$ gilt entweder $\overline{TX} \cap g = \emptyset$ oder $\overline{TX} \cap g \neq \emptyset$. Somit ist $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$ und $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 = \mathcal{E}\setminus g$.

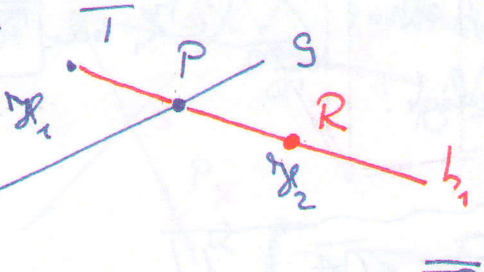
(0) $\mathcal{H}_1 \neq \emptyset$, $\mathcal{H}_2 \neq \emptyset$:

Da $T \notin g$ ist, folgt: $\overline{TT} \cap g = \{T\} \cap g = \emptyset$; also $\boxed{T \in \mathcal{H}_1}$ nach Def. von $\mathcal{H}_1$

$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{H}_1 \neq \emptyset}$

Weiterhin ex. nach Inzidenzaxiom (I) mind. ein Punkt $\boxed{P \in g}$ (sogar mind. 2 Punkte). Wir betrachten nun die Halbgerade $\boxed{h_1 := \overrightarrow{TP}}$ mit $\boxed{h_1 \cap g = TP \cap g = \{P\}}$. Aufgrund des Streckenmaßaxioms (V) – speziell der eindeutigen Abtragbarkeit von Längen – existiert ein Punkt $\boxed{R \in h_1}$ mit $\boxed{d(T,R) = 2 \cdot d(T,P) > d(T,P)}$ (R ist sogar eindeutig gegeben).

Skizze:



Es folgt dann: $\boxed{P \in \overline{RT}}$, $\boxed{P \neq R}$

(Denn mit $R \in \overline{TP}$ wäre $d(T,R) \leq d(T,P)$ ↯)

Dann erhalten wir wegen $P \in g$:

$\overline{TR} \cap g = \{P\} \neq \emptyset$, d.h.: $\boxed{R \in \mathcal{H}_2}$.

$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{H}_2 \neq \emptyset}$

Also ist $\mathcal{H}_i \neq \emptyset$ für $i = 1, 2$ nachgewiesen.

⟶

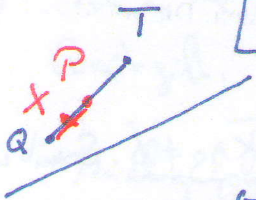
Ü(b) (1) ${}^T\mathcal{X}_1$ und ${}^T\mathcal{X}_2$ sind konvex:

(i) ${}^T\mathcal{X}_1$: Wir müssen zeigen, daß gilt: $\bigwedge_{P,Q\in {}^T\mathcal{X}_1} \overline{PQ}\subset {}^T\mathcal{X}_1 \iff \bigwedge_{P\in{}^T\mathcal{X}_1}\bigwedge_{Q\in{}^T\mathcal{X}_1}\bigwedge_{X\in\ell} X\in\overline{PQ} \Rightarrow X\in{}^T\mathcal{X}_1$

Seien nun $P,Q\in{}^T\mathcal{X}_1$ beliebig. Hinsichtlich T gibt es dann folgende zwei Fälle:

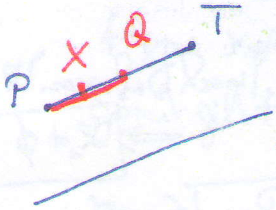
Fall (i): (α) P,Q,T sind kollinear:

Wegen Aufg. 8, Kap. 1 im Skript gilt dann: $\boxed{P\in\overline{QT}\vee Q\in\overline{PT}\vee T\in\overline{PQ}}$



(I) Aus $\boxed{P\in\overline{QT}}$ folgt: $X\in\overline{PQ}\subseteq\overline{QT}$ für alle $X\in\overline{PQ}$. Somit ist $\boxed{\bigwedge_{X\in\overline{PQ}} \overline{XT}\subseteq\overline{QT}}$, also: $\boxed{\overline{XT}\cap g\subseteq\overline{QT}\cap g=\emptyset}$, da $Q\in{}^T\mathcal{X}_1$.

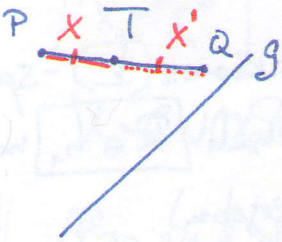
Wir haben: $\bigwedge_{X\in\overline{PQ}} X\in{}^T\mathcal{X}_1$ oder: $\boxed{\overline{PQ}\subseteq{}^T\mathcal{X}_1}$ ✓



(II) Aus $\boxed{Q\in\overline{PT}}$ folgt analog: $\bigwedge_{X\in\ell} X\in\overline{PQ}\Rightarrow X\in\overline{PT}$ wegen $\overline{PQ}\subseteq\overline{PT}$.

Also: $\boxed{\bigwedge_{X\in\overline{PQ}} \overline{XT}\subseteq\overline{PT}} \Longrightarrow \boxed{\bigwedge_{X\in\overline{PQ}} \overline{XT}\cap g\subseteq\overline{PT}\cap g=\emptyset}$, da $P\in{}^T\mathcal{X}_1$.

Wir haben: $\bigwedge_{X\in\overline{PQ}} X\in{}^T\mathcal{X}_1$ oder $\boxed{\overline{PQ}\subseteq{}^T\mathcal{X}_1}$ ✓

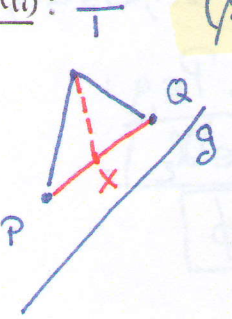


(III) Aus $\boxed{T\in\overline{PQ}}$ folgt: $\overline{PQ}=\overline{PT}\cup\overline{TQ}$. Somit gilt für alle $X\in\overline{PQ}$: $X\in\overline{PT}\vee X\in\overline{TQ}$, d.h.: $\overline{XT}\subseteq\overline{PT}\vee\overline{XT}\subseteq\overline{QT}$. Damit folgt: $\bigwedge_{X\in\overline{PQ}}\left[\overline{XT}\cap g\subseteq\overline{PT}\cap g=\emptyset \vee \overline{XT}\cap g\subseteq\overline{QT}\cap g=\emptyset\right]$ wegen $P,Q\in{}^T\mathcal{X}_1$.

$\Longrightarrow \boxed{\bigwedge_{X\in\overline{PQ}} \overline{XT}\cap g=\emptyset}$, also: $\bigwedge_{X\in\overline{PQ}} X\in{}^T\mathcal{X}_1$ oder $\boxed{\overline{PQ}\subseteq{}^T\mathcal{X}_1}$ ✓

Damit ist Fall (α) erledigt!

Fall (ii): (β) P,Q,T nicht kollinear:



Da $P,Q\in{}^T\mathcal{X}_1$, folgt: $\overline{PT}\cap g=\overline{QT}\cap g=\emptyset$

Wir wollen zeigen: $\overline{PQ}\subseteq{}^T\mathcal{X}_1$, d.h. $\bigwedge_{X\in\overline{PQ}} X\in{}^T\mathcal{X}_1$.

Zunächst folgt: $\boxed{\overline{PQ}\cap g=\emptyset}$, denn sonst wäre nach Pasch

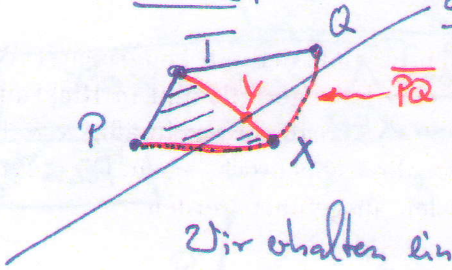
Zu Ü(b)

$\overline{PT}\cap g \neq \emptyset$ oder $\overline{QT}\cap g\neq\emptyset$, bezogen auf das Dreieck $\{P,Q,T\}$.

Es bleibt zu zeigen: $\bigwedge_{X\in\overline{PQ}} X \in \mathfrak{X}_1$, d.h. $\boxed{\overline{TX}\cap g=\emptyset}$! für $X\in\overline{PQ}$ beliebig.

Angenommen, für ein $X\in\overline{PQ}$ gelte $\overline{TX}\cap g = \{Y\}\neq\emptyset$, dann würde nach Pasch, bezogen auf das Dreieck $\{P,T,X\}$ gelten: $\overline{PT}\cap g\neq\emptyset \vee \overline{PX}\cap g\neq\emptyset$. Nun ist wegen $P\in\mathfrak{X}_1$ auf jeden Fall $\overline{PT}\cap g=\emptyset$; d.h. es muß $\boxed{\overline{PX}\cap g\neq\emptyset}$ sein.

Skizze:



Andererseits ist $\overline{PX}\subseteq\overline{PQ}$ für $X\in\overline{PQ}$ und damit $\boxed{\overline{PX}\cap g \subseteq \overline{PQ}\cap g=\emptyset}$ ↯

Wir erhalten einen Widerspruch. D.h.: $\overline{TX}\cap g=\emptyset$ ✓ für $X\in\overline{PQ}$ beliebig.

Somit folgt: $\bigwedge_{X\in\overline{PQ}} X\in\mathfrak{X}_1$ oder: $\boxed{\overline{PQ}\subset\mathfrak{X}_1}$.

H(c)

(ii) Zu $\mathfrak{X}_2$: Wir müssen analog zu (i) zeigen, daß gilt: $\bigwedge_{P,Q\in\mathfrak{X}_2}\overline{PQ}\subset\mathfrak{X}_2$

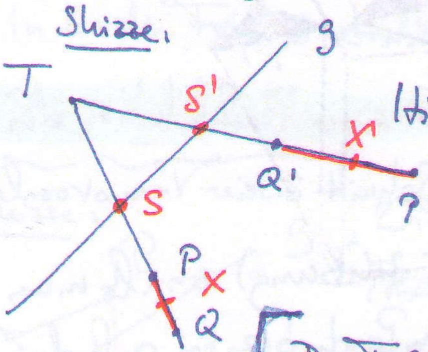
$\iff \bigwedge_{P\in\mathfrak{X}_2}\bigwedge_{Q\in\mathfrak{X}_2}\bigwedge_{X\in E} X\in\overline{PQ}\Rightarrow X\in\mathfrak{X}_2$

Seien nun $P,Q\in\mathfrak{X}_2$ beliebig gewählt. Wieder erhalten wir bezüglich T folgende zwei Fälle:

(α) P, Q, T sind kollinear:

Da $PQ\notin g$ folgt: $PT=QT$ mit $\overline{PT}\cap g\neq\emptyset$, $\overline{QT}\cap g\neq\emptyset$ $\Rightarrow \overline{PT}\cap g=\overline{QT}\cap g=\{S\}$

Skizze:



Hinsichtlich P und Q folgt dann: $P\in\overline{QT}\vee Q\in\overline{PT}$, Also: $\overline{PT}\subseteq\overline{QT}\vee\overline{QT}\subseteq\overline{PT}$ und auf jeden Fall: $\boxed{\overline{PQ}\subseteq\overline{PT}\vee\overline{PQ}\subseteq\overline{QT}}$

[Der Fall $T\in\overline{PQ}$ ist ausgeschlossen, da sonst wegen

$\overline{PQ}=\overline{PT}\cup\overline{TQ}$, $\overline{PT}\cap\overline{QT}=\{T\}$ → $\overline{PT}\cap g=\{S\}$, $\overline{QT}\cap g=\{U\}$ mit $S\neq U$ folgen würde und damit $PQ=SU=g$ ↯ (zu $PQ\notin g$!!)]

[Zu H(c)]

Somit folgt für $X \in \overline{PQ}$ beliebig:

$\boxed{\overline{PQ} \subseteq \overline{PT} \Rightarrow \overline{XT} \supseteq \overline{QT}}$ bzw. $\boxed{\overline{PQ} \subseteq \overline{QT} \Rightarrow \overline{XT} \supseteq \overline{PT}}$

Das bewirkt:

$$\boxed{\bigwedge_{X\in\overline{PQ}} \overline{XT}\cap g \supseteq \overline{QT}\cap g \neq \emptyset \vee \overline{XT}\cap g \supseteq \overline{PT}\cap g \neq \emptyset}$$

In jedem Fall: $\boxed{\bigwedge_{X\in E} X\in\overline{PQ} \Rightarrow \overline{XT}\cap g\neq\emptyset}$. Nun gilt:

$\overline{XT}\cap g \neq \emptyset,\ X\notin g \Leftrightarrow \boxed{X\in\mathfrak{X}_2}$. Also $\bigwedge_{X\in E} X\in\overline{PQ}\Rightarrow X\in\mathfrak{X}_2$ oder $\boxed{\overline{PQ}\subseteq\mathfrak{X}_2}$

(β) P, Q, T sind nicht kollinear:

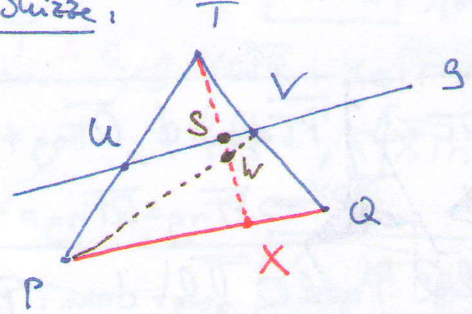
Sei $\boxed{\overline{TP}\cap g=\{U\} \text{ und } \overline{TQ}\cap g=\{V\}}$. Zunächst folgt nach dem Satz von Pasch bzw. Aufgabe 13, 3. Lösung: $\boxed{\overline{PQ}\cap g=\emptyset.}$

Denn wäre $\overline{PQ}\cap g=\{S\}$ so würde folgen $\{U,V,S\}\subset g$, d.h. g geht durch alle 3 Seiten des nichtentarteten Dreiecks $\{P,Q,T\}$!

[Widerspruch dazu, daß U,V,S nicht kollinear sein dürfen!]

Es bleibt zu zeigen: $\overline{PQ}\subseteq\mathfrak{X}_2$ bzw. $\boxed{\bigwedge_{X\in\overline{PQ}} X\in\mathfrak{X}_2}$

Skizze:



Wir betrachten das Dreieck $\{P,Q,T\}$ mit auf den offenen Teilstrecken liegenden Punkten U,V,X.

Nach einer Modifikation des Satzes über den Schnitt zweier Transversalenabschnitte in einem Dreieck (s. Aufgabe 15, 3. Lösung) erhält man: $\overline{UV}\cap\overline{TX}=\{S\}$

Alternative: Betrachte Satz von Pasch, bezogen auf das Dreieck $\{P,T,X\}$! Dann gilt: $\overline{PT}\cap g=\{U\}$ mit $U\in\overline{PT}$ und damit: $\overline{PX}\cap g\neq\emptyset \vee \overline{XT}\cap g\neq\emptyset$. Nun wissen wir: $\overline{PX}\cap g\subseteq\overline{PQ}\cap g=\emptyset$. Also muß gelten: $\overline{XT}\cap g\neq\emptyset$, d.h. $\boxed{X\in\mathfrak{X}_2.}$ Somit folgt: $\boxed{\overline{PQ}\subseteq\mathfrak{X}_2}$.

Bleibt nur noch zu zeigen:

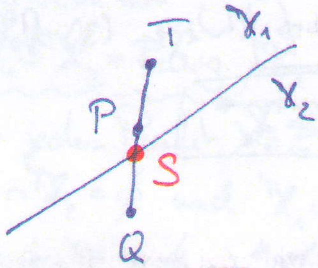
$\overline{H}(d)$ (3) $\bigwedge_{P\in\mathfrak{X}_1}\ \bigwedge_{Q\in\mathfrak{X}_2} \overline{PQ}\cap g \neq \emptyset$:

Seien $P\in\mathfrak{X}_1$, $Q\in\mathfrak{X}_2$ beliebig. Dann kann bezüglich T gelten:

(α) P, Q, T kollinear:

Daraus folgt: $\boxed{P\in\overline{QT} \vee Q\in\overline{PT} \vee T\in\overline{PQ}}$. Nun ist der Fall $Q\in\overline{TP}$ nicht möglich, da dann $\overline{TQ}\subseteq\overline{TP}\subset\mathfrak{X}_1$ wäre wegen der Konvexität von $\mathfrak{X}_1$! Also: $\boxed{Q\notin\overline{TP}}$ und damit $\boxed{P\in\overline{QT}\vee T\in\overline{PQ}}$

(i) $P\in\overline{QT}$: Dann ist $\boxed{\overline{QT}=\overline{PT}\cup\overline{PQ}}$ und $\boxed{\overline{PT}\cap g=\emptyset}$ wegen $P\in\mathfrak{X}_1$.

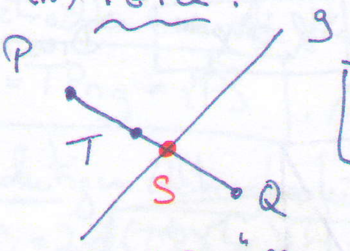


Wegen $Q\in\mathfrak{X}_2$ ist aber andererseits: $\boxed{\overline{QT}\cap g=\{S\}\neq\emptyset}$. Es folgt:

$$\overline{QT}\cap g=[\overline{PT}\cup\overline{PQ}]\cap g=\underbrace{(\overline{PT}\cap g)}_{=\emptyset}\cup(\overline{PQ}\cap g)=\overline{PQ}\cap g,$$ d.h.:

$\boxed{\overline{PQ}\cap g=\overline{QT}\cap g\neq\emptyset}$

(ii) $T\in\overline{PQ}$: Dann ist $\boxed{\overline{QT}\subseteq\overline{PQ}}$, und es folgt:

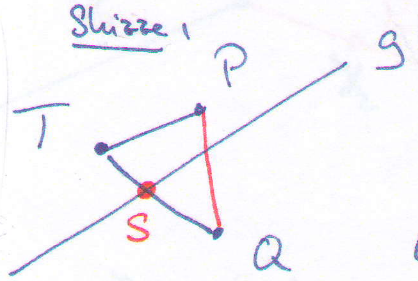


$\boxed{\overline{PQ}\cap g\supseteq\overline{QT}\cap g\neq\emptyset}$ wegen $Q\in\mathfrak{X}_2$.

In beiden Fällen erhält man also: $\overline{PQ}\cap g\neq\emptyset$.

(β) P, Q, T nicht kollinear:

Skizze:



Wir haben hier die Ausgangssituation zur Anwendung des Satzes von Pasch gegeben wegen $\boxed{\{T,P,Q\}\cap g=\emptyset}$, $\boxed{\overline{TQ}\cap g=\{S\}\neq\emptyset}$

Es muß gelten: $\overline{TP}\cap g\neq\emptyset \vee \overline{PQ}\cap g\neq\emptyset$

Nun ist $P\in\mathfrak{X}_1$, d.h.: $\boxed{\overline{TP}\cap g=\emptyset}$. Also muß gelten: $\boxed{\overline{PQ}\cap g\neq\emptyset}$.

U(e)

(b) Beweis der Eindeutigkeit der Halbebenen $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ zu g:

Seien $\mathcal{H}_1^*, \mathcal{H}_2^*$ zwei weitere Halbebenen zu g, also:

(1) $\mathcal{E}\setminus g = \mathcal{H}_1^* \cup \mathcal{H}_2^*$, $\mathcal{H}_1^* \cap \mathcal{H}_2^* = \emptyset$, $\mathcal{H}_i^* \neq \emptyset$ $(i=1,2)$.

(2) $\mathcal{H}_i^*$ konvex für $i=1,2$.

(3) $\bigwedge\limits_{P\in\mathcal{H}_1^*} \bigwedge\limits_{Q\in\mathcal{H}_2^*} \overline{PQ}\cap g \neq \emptyset$.

Dann gilt zunächst für $T_1\in\mathcal{H}_1$: $\boxed{T\in\mathcal{H}_1^* \vee T\in\mathcal{H}_2^*}$. Sei o.B.d.A. $\boxed{T\in\mathcal{H}_1^*}$.
Für alle $X\in\mathcal{H}_1$ folgt dann:

$X\in\mathcal{H}_1 \Rightarrow \overline{TX}\in\mathcal{H}_1$, also insbesondere: $\boxed{\overline{TX}\cap g=\emptyset}$. Wegen (3) folgt: $\boxed{X\in\mathcal{H}_1^*}$.
Somit gilt: $\bigwedge\limits_{X\in\mathcal{E}} X\in\mathcal{H}_1 \Rightarrow X\in\mathcal{H}_1^*$ oder: $\boxed{\mathcal{H}_1\subseteq\mathcal{H}_1^*}$.

Analog folgt für jedes $X\in\mathcal{H}_2$:

$X\in\mathcal{H}_2 \Rightarrow \boxed{\overline{TX}\cap g\neq\emptyset}$ Wegen der Konvexität von $\mathcal{H}_1^*$ (s. (2)) und $T\in\mathcal{H}_1^*$ muß folgen: $X\notin\mathcal{H}_1^*$ und damit wegen $X\notin h$: $\boxed{X\in\mathcal{H}_2^* = \mathcal{E}\setminus(\mathcal{H}_1^*\cup h)}$.
Somit gilt: $\bigwedge\limits_{X\in\mathcal{E}} X\in\mathcal{H}_2 \Rightarrow X\in\mathcal{H}_2^*$ oder: $\boxed{\mathcal{H}_2\subseteq\mathcal{H}_2^*}$ Daraus folgt:

$\mathcal{H}_1 = \mathcal{E}\setminus(\mathcal{H}_2\cup h) \supseteq \mathcal{E}\setminus(\mathcal{H}_2^*\cup h) = \mathcal{H}_1^*$, also: $\boxed{\mathcal{H}_1\supseteq\mathcal{H}_1^*}$. Dies ergibt insgesamt: $\boxed{\mathcal{H}_1=\mathcal{H}_1^*}$, woraus folgt:

$\mathcal{H}_2 = \mathcal{E}\setminus(\mathcal{H}_1\cup h) = \mathcal{E}\setminus(\mathcal{H}_1^*\cup h) = \mathcal{H}_2^*$, d.h.: $\boxed{\mathcal{H}_2=\mathcal{H}_2^*}$.

Also sind die Halbebenen $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ zu g bis auf Bezeichnung (Vertauschung) eindeutig gegeben.