# Vorlesung vom 30.05.2013:

· Geradenspiegelungen und Symmetrie (Achsensymmetrie)

· Mittelsenkrechte

„Bewegungen"

Komposition von Abb.

Zentral in der „Gruppe" der Kongruenzabbildungen $(\mathfrak{B}, \circ)$ sind die Achsenspiegelungen, deren Existenz und Eindeutigkeit durch Ax (VIII) gesichert ist.

Geraden- und Maßtreue!

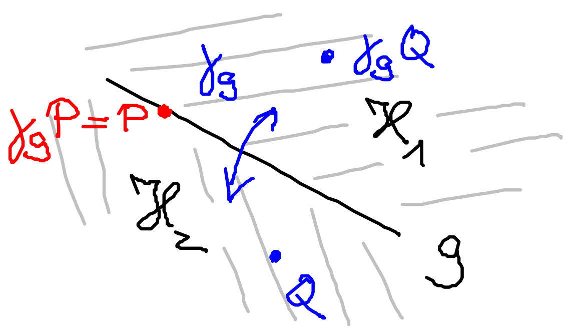
Ax (VIII): Zu jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ ex. genau eine KA $\gamma_g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$

mit (i) $\forall P \in g : \gamma_g P = P$ $\Rightarrow$ g ist Fixpunktgerade

(ii) $\mathcal{E} \setminus g = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \Rightarrow \gamma_g \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 \wedge \gamma_g \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1$

Halbebene

muss nicht unbedingt gefordert werden. Es folgt aus (i) und $\gamma_g \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$

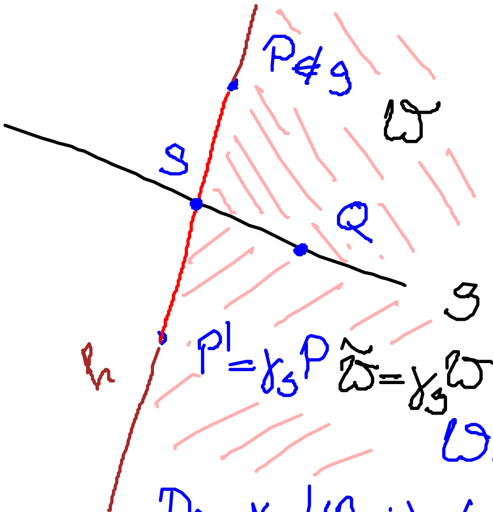



## Satz 3.2:

Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit von Senkrechten $h \perp g$ (h als Winkelhalbierende eines gestreckten WFs $\overline{\mathcal{H}_g}$)

**Beweis:** (a)(i) $P \in g$ : Dann siehe Di-Vorlesung!

(ii) $P \notin g$: Interessanter Fall!




$P \notin g \Rightarrow P \in \mathcal{H}_1 \vee P \in \mathcal{H}_2 \xRightarrow{Ax\ VIII}$

$P' = \gamma_g P \in \mathcal{H}_2 = \gamma_g \mathcal{H}_1$.

$\xRightarrow{Ax\ VI}$ $\overline{PP'} \cap g = \{S\}$. Für $h = PP'$ (Ax II),

$h = \overleftarrow{SP} \cup \overleftarrow{SP'}$. Weiter sei $Q \in g \setminus \{S\}$ (Ax I)

Winkelfeld $\mathcal{W} = \sphericalangle PSQ \subseteq \overline{\mathcal{H}_1}$.

Da $\gamma_g$ KA ist (also halbgeradentreu), gilt:

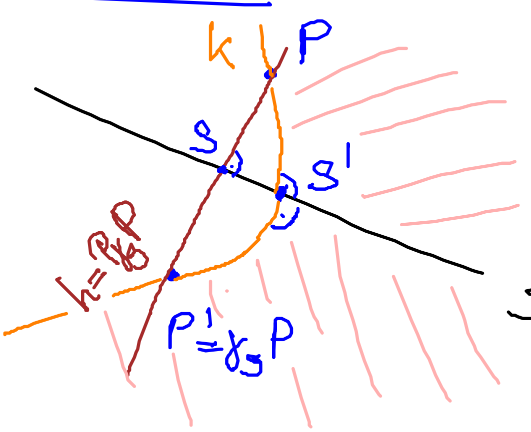
$\gamma_g \overleftarrow{SP} = \overleftarrow{\gamma_g S \gamma_g P} = \overleftarrow{SP'}$, $\gamma_g \overleftarrow{SQ} = \overleftarrow{SQ}$ — g Fixpunktgerade

$\Longrightarrow$ WF-Treue: $\gamma_g \mathcal{W} = \gamma_g(\sphericalangle PSQ) = \sphericalangle \gamma_g P \gamma_g S \gamma_g Q = \sphericalangle P'SQ = \tilde{\mathcal{W}}$

$\mathcal{W}_0 := \mathcal{W} \cup \tilde{\mathcal{W}}$ ist ein Winkelfeld, welches durch $g_1 := \overleftarrow{SQ}$ zerlegt wird mit $\omega(\mathcal{W}) = \omega(\tilde{\mathcal{W}})$ (Winkelmaßtreue)

Da die Schenkel $\overleftarrow{SP}$ und $\overleftarrow{SP'}$ von $\mathcal{W}_0$ die Gerade $h$ bilden, ist $\mathcal{W}_0 = \overline{\mathcal{H}_h}$ abgeschlossene HE zu $h$. Andererseits ist $g$ Winkelhalbierende zu $\mathcal{W}_0 = \overline{\mathcal{H}_h}$, also: $g \perp h$. Dann ist auch $h \perp g$, denn $\omega(\mathcal{W}) = \frac{1}{2} 180 = 90 \Rightarrow h$ Winkelhalbierende zur Halbebene $\overline{\mathcal{H}_g}$ mit $P \in \mathcal{H}_g$

(b) Eindeutigkeit der Senkrechten:




$h = P\gamma_g P \perp g$ und $\{S\} = g \cap h$

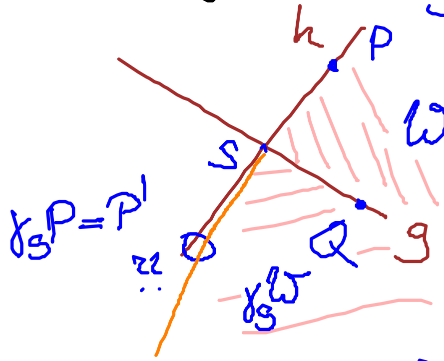
Sei $k \perp g$ mit $P \in k$, $\{S'\} = g \cap k$

$k' = \gamma_g k = S'P' = S'\gamma_g P$. Wegen der Winkelmaßtreue ist $\gamma_g k = k' = k$ !!

$\Longrightarrow k = PP' = h \Rightarrow S = S'$ ∎

**Satz 3.3:** Sind $g, h \in \mathcal{G}$ mit $g \perp h$, dann gilt $\gamma_g h = h$ und $\gamma_h g = g$

**Beweis (Aufgabe):** Wegen $g \perp h \Rightarrow h \perp g$ reicht z.z.: $\gamma_g h = h$




Sei $g \perp h$, also mit $P \in h$, $Q \in g$:

$$\omega(\underbrace{\sphericalangle PSQ}_{=W}) = 90 \Rightarrow \gamma_g W = \sphericalangle \gamma_g PSQ = \sphericalangle P'SQ$$

mit $\omega(\gamma_g W) = \omega(W) = 90$

$\Rightarrow W \cup \gamma_g W$ ist gestrecktes WF $\Rightarrow \underbrace{P' = \gamma P} \in h = SP$

Geradentreue von $\gamma_g$: $\boxed{\gamma_g h} = \gamma_g \overline{PS} = \underbrace{\gamma_g P}_{P'} \underbrace{\gamma_g S}_{S} = \overline{P'S} = h$ ∎

**Wichtige Geraden:** Mittelsenkrechte zu einer Strecke $\overline{PQ}$ (Def. 3.6)

Wichtige Eigenschaften (Sätze): Sei $m \perp \overline{PQ} \subsetneq PQ$, $\{M\} = m \cap \overline{PQ}$

Übungsaufgabe:

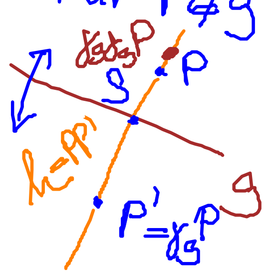
1) $\forall R \in \mathcal{E}: R \in m \Rightarrow d(R,P) = d(R,Q)$
2) $\forall R \in \mathcal{E}: d(R,P) = d(R,Q) \Rightarrow R \in m$ Umkehrung zu (1)!

Auch wichtige Geraden: Winkelhalbierende $w$ zu WF $W$. Dazu Satz 3.5

Jetzt Aufgabe 3.3: z.z.: $\gamma_g \gamma_g = id$, d.h. $\boxed{\forall P \in \mathcal{E} \;\; \gamma_g \gamma_g P = P = id P}$

**Beweis:** Für $P \in g$ ist die Sache klar, da $\gamma_g P = P$.

Für $P \notin g$ ist $h = PP' \perp g$, also $\gamma_g h = h \Rightarrow \gamma_g \gamma_g h = \gamma_g h = h$




Außerdem $\gamma_g \gamma_g P = \gamma_g P' \in \overline{SP}$ (doppelter HE-Tausch)

Wegen Längentreue gilt:

$$\underbrace{d(\gamma_g \gamma_g P, S)} = d(\gamma_g \gamma_g P, \underset{\gamma_g\gamma_g S}{\underset{\parallel}{\gamma_g \gamma_g S}}) = d(\gamma_g P, \gamma_g S) = \underline{d(P,S)}$$

$\gamma_g \gamma_g P$ und $P$ haben auf $\overline{SP}$ denselben Abstand zu $S$

Ax $\boxed{V}$) $\Longrightarrow$ $\gamma_{gs}P = P$ ■

Eindeutige Abtragbarkeit!

ENDE der Vorlesung!