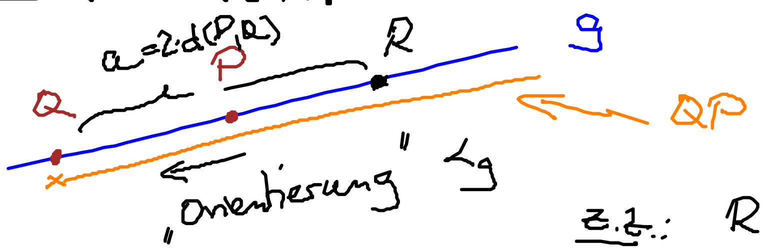
Vorlesung vom 30.04.13:

Kurze Bemerkung zum Beweis von Satz 1.6:

z.z.: Ist auf einem Strahl $\overline{PR}$ für $Q \in \overline{PR}$ $d(P,Q)=0$, so folgt: $Q=P$ („automatisch": $P \neq R$)

Beweis: Gezeigt haben wir bereits: $d(P,Q)=0$ für $Q=P\in\overline{PR}$.
Die eindeutige Abtragbarkeit (iii) in Axiom (V) garantiert, dass kein anderer Punkt $Q\in\overline{PR}$ außer $P=Q$ den Abstand $d(P,Q)=0$ besitzt.

Zum Beweis von Satz 1.7



Axiom (V) angewandt auf Strahl $\overline{QP}$ mit $a=2\cdot d(P,Q)$ liefert $R\in g$ mit $\boxed{R<P!!}$ und $d(R,Q)=a$

im Skript: $R=Q'$

z.z.: $R<P<Q$

$\Leftrightarrow P\in\overline{RQ}\setminus\{R,Q\}$

Beachte: $R\neq Q$, da $P\neq Q \Rightarrow a=2\cdot d(P,Q)\neq 0 \Rightarrow R\neq Q$, da $d(R,Q)=a\neq 0$

Außerdem: Wäre $R=Q'\in\overline{PQ}$, dann gälte wegen der Additivität (ii) in Ax (V):

$$d(P,Q)=d(P,R)+\underbrace{d(R,Q)}_{=a}=d(P,R)+2\cdot d(P,Q) \quad \text{bzw.}$$

$-d(P,Q)$ $\Leftrightarrow$

$$0=\underbrace{d(P,R)}_{\geq 0}+\underbrace{d(P,Q)}_{\geq 0} \quad \lightning \text{ zu } d(P,Q)>0,\ d(P,R)\geq 0$$

nach Def. von $d: \mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathbb{R}_0^+$!!

Also haben wir mit $R=Q'$ einen Punkt auf $g=PQ$ mit $R\notin\overline{PQ}=g_1$

Definiere $g_2 := \overline{PR} = \overline{PQ'}$

Zum Beweis von Satz 1.8:

Durch Ax (V) ist die Existenz und Eindeutigkeit eines Punktes $M\in\overline{PQ}$ mit $d(P,M)=a:=\frac{1}{2}d(P,Q)$ gesichert!!

Beweis zu Satz 1.9,

Teil (b), (c) im Beweis der Injektivität der Koordinatenfkt $\chi: g \to \mathbb{R}$

(b) z.z.: $P < O < R \Rightarrow \underbrace{\chi(P)}_{} = -d(P,O) < 0 = d(O,O) < d(P,R) = \underbrace{\chi(R)}_{}$ ■

(c) z.z.: $O < P < R \Rightarrow \chi(P) < \chi(R)$

Es gilt: $\chi(R) = d(O,R) \overset{\text{Additivität}}{=} \underbrace{d(O,P)}_{=\chi(P)} + d(P,R) = \chi(P) + \underbrace{d(P,R)}_{>0} > \chi(P)$ ■

Beweis zu Satz 1.10,

z.z.: Jede bijektive Abbildung $\chi^*: g \to \mathbb{R}$ mit

(1) $\chi^*(O) = 0$, (2) $|\chi^*(P) - \chi^*(Q)| = d(P,Q)$, (3) $\chi^*(P) < \chi^*(Q) \Leftrightarrow P <_g Q$

stimmt mit $\chi: g \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\chi(P) = \begin{cases} -d(P,O) & , P \leq O \\ d(P,O) & , O < P \end{cases}$$

überein.

Es gilt: $\chi^*(O) \overset{(1)}{=} 0 = \chi(O)$.

Außerdem: $|\chi^*(P)| = |\chi^*(P) - \underbrace{\chi^*(O)}_{=0}| \overset{(2)}{=} d(P,O) = |\chi(P)|$

(i) Falls $P < O$, dann: $\chi^*(P) \overset{(3)}{<} \chi^*(O) = 0$ und $\chi(P) < 0$ $\Rightarrow \chi^*(P) = \chi(P)$

(ii) Falls $O < P$, dann: $\chi^*(O) = 0 < \chi^*(P)$ und $0 < \chi(P)$

$\Longrightarrow \chi^*(P) = |\chi^*(P)| = |\chi(P)| = \chi(P)$ ■

§2 Konvexität und Halbebenen, Donnerstag mehr!

ENDE der Vorlesung!