Vorlesung vom 28.05.2013:

Thema: Strukturerhaltende Abbildungen einer Geometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$

Grundvoraussetzung: $\alpha: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ bijektiv, genannt eine Permutation

$$\boxed{\mathcal{P} := \{\alpha: \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid \alpha \text{ bijektiv}\}}$$

Was heißt „Strukturerhaltung"?
- Geradentreue
- Maßtreue
  - Längenmaßtreue
  - Winkelmaßtreue

!

a) Geradentreue: $\forall g \in \mathcal{G}: \alpha g = \{\alpha P \mid P \in g\} \in \mathcal{G}$

b) Längenmaßtreue: $\forall P, Q \in \mathcal{E}: d(\alpha P, \alpha Q) = d(P, Q)$

Abstand auf den „Strecken" $\overline{PQ}$ bzw. $\overline{\alpha P \alpha Q}$ gemessen!

c) Winkelmaßtreue: $\forall \mathcal{W} \in \Omega_{P(\mathcal{E})}: \omega(\alpha\mathcal{W}) = \omega(\mathcal{W})$

verlangt, dass $\alpha\mathcal{W} \in \Omega_{\alpha P(\mathcal{E})}$, also $\alpha\mathcal{W}$ Winkelfeld!

Bem.: (b) erfordert den Nachweis der Streckentreue,
(c) erfordert — " — Winkelfeldtreue.

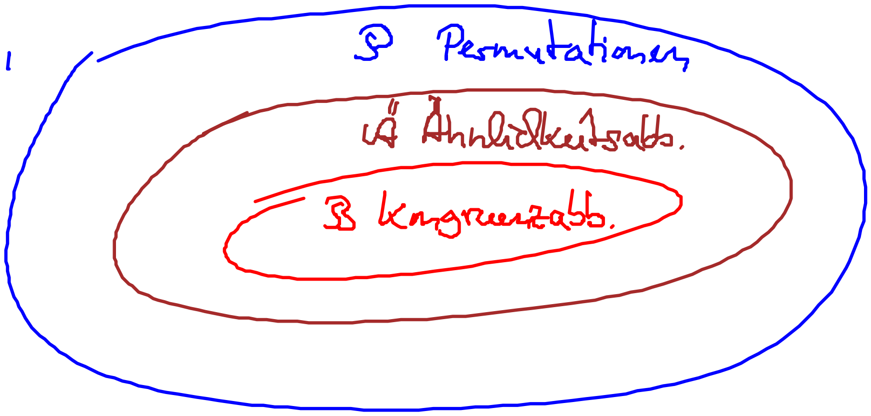
Eine Abb. $\beta: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\beta \in \mathcal{P}$ mit Eigenschaften (a)–(c) heißt eine **Kongruenzabbildung**, auch „**Bewegung**" genannt.

Fordert man statt Längentreue (b) die schwächere Eigenschaft

(b') Längenverhältnistreue: $\exists k > 0 \; \forall P, Q \in \mathcal{E}: d(\alpha P, \alpha Q) = k \cdot d(P, Q)$

dann heißt die Abbildung $\alpha \in \mathcal{P}$ mit (a), (b'), (c) eine **Ähnlichkeitsabbildung**

Diagramm:



$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{Ä} \subset \mathfrak{P}$

Bemerkung: Betrachtet man die Komposition „$\circ$" von Abbildungen, dann sind $(\mathfrak{B},\circ)$ und $(\mathfrak{Ä},\circ)$ Untergruppen zur Gruppe $(\mathfrak{P},\circ)$.

Frage: Wie lautete das Untergruppenkriterium für eine nichtleere Teilmenge $U \neq \emptyset$ einer Gruppe $(G,\circ)$?

$U \neq \emptyset, U \subseteq G$ ist UG $\Longleftrightarrow$ $\forall u,v \in U: \underbrace{u \circ v}_{\in G} \in U$ — Abgeschlossenheit bezügl. „$\circ$"

$\forall u \in U: \underbrace{u^{-1}}_{\in G} \in U$ — Abgeschlossenheit bezügl. Inversenbildung

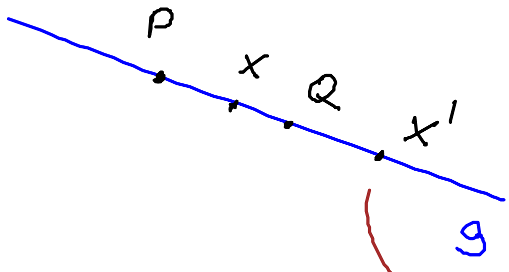
Ist äquivalent zu der einen Forderung: $\boxed{\forall u,v \in U: u \circ v^{-1} \in U}$

Bemerkung: Bezüglich der Bijektivität sind beide Untergruppenaxiome erfüllt:

$\alpha, \beta: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ bijektiv $\Rightarrow \beta\alpha: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ bijektiv

$\alpha: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ bijektiv $\Rightarrow \exists \alpha^{-1}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ und α^{-1} bijektiv, wobei $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$

Zum Beweis der Streckentreue im Satz 3.1:



$P, Q, X, X' \in g$. Dann:

$$X \in \overline{PQ} \Leftrightarrow \underbrace{d(P,X)+d(X,Q)=d(P,Q)}_{\text{Streckenmaßaxiom (V)}}$$

$$X' \notin \overline{PQ} \Rightarrow \underbrace{d(P,X')}_{\text{hier: } = d(P,Q)+d(Q,X')}+d(X',Q) > d(P,Q)$$

4

Zum Beweisteil „halbgeradentreu":

Gezeigt: $\alpha\overrightarrow{PQ} \subseteq \overrightarrow{\alpha P\alpha Q}$. Dann analog wie in (a):

$$\alpha^{-1}(\overrightarrow{\alpha P\alpha Q}) \subseteq \overrightarrow{\alpha^{-1}\alpha P\,\alpha^{-1}\alpha Q} = \overrightarrow{PQ} \xRightarrow{\alpha(\;)} \alpha\alpha^{-1}\overrightarrow{\alpha P\alpha Q} = \overrightarrow{\alpha P\alpha Q} \subseteq \alpha\overrightarrow{PQ}$$

Also: $\alpha\overrightarrow{PQ} \subseteq \overrightarrow{\alpha P\alpha Q} \wedge \overrightarrow{\alpha P\alpha Q} \subseteq \alpha\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \boxed{\alpha\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\alpha P\alpha Q}}$

Zum Beweis der Winkelfeldtreue:

Gezeigt wurde die Halbebenentreue, d.h. $\alpha\mathcal{H}_h = \mathcal{H}_{\alpha h}$ eine der beiden Halbebenen zu $\alpha h \in \mathcal{G}$. Für das Winkelfeld $\mathcal{W} \in \Omega_{P(\in)}$ gilt dann:

$$\mathcal{W} = \overline{\mathcal{H}}_g \cap \overline{\mathcal{H}}_h \text{ mit } g \cap h = \{P\} \Rightarrow \alpha\mathcal{W} = \alpha(\overline{\mathcal{H}}_g \cap \overline{\mathcal{H}}_h) \overset{\alpha \text{ injektiv!}}{=} \alpha\overline{\mathcal{H}}_g \cap \alpha\overline{\mathcal{H}}_h$$

$$= \overline{\mathcal{H}}_{\alpha g} \cap \overline{\mathcal{H}}_{\alpha h} = \mathcal{W}_{\alpha P} \in \Omega_{\alpha P(\in)}$$

mit $\{\alpha P\} = \alpha g \cap \alpha h = \alpha(g \cap h)$ ∎

Wir vollziehen den vorletzten Schritt zur Euklidischen Geometrie:

$\boxed{\text{Ax VIII} \to \text{Spiegelungsaxiom}}$ ist eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage!

Damit ist die Existenz von (unendlich vielen) Kongruenzabbildungen $\neq \mathrm{id}$ gesichert!!

Die Achsenspiegelungen stellen die Bausteine der KAen dar!!

Satz 3.2 sichert die Existenz und Eindeutigkeit von Senkrechten bei gegebener Gerade $g \in \mathcal{G}$ und gegebenem Punkt. Lote!

Beweis: (i) $P \in g$: h als Winkelhalbierende zum gestreckten Winkelfeld $\overline{\gamma}_g$. Eindeutigkeit und Existenz wegen Ax $\boxed{VII}$ gesichert.

(ii) $P \notin g$: Betrachte die nach (Ax $\boxed{VIII}$) existierende eindeutige Achsenspiegelung γ_g an g. $P' = \gamma_g P$ und $\{S\} = g \cap \underbrace{\overline{PP'}}_{=h}$

(Ax $\boxed{VI}$)

Weiterer Punkt $Q \in g$, $Q \neq P$.

Weiter im Beweis am Donnerstag!!