Vorlesung vom 27.06.2013:

Zunächst zur Klausur und zum 11. Übungsblatt:

Klausurtermin: Do, 11.07.2013, 12:15 – 13:45 h (90 min)
⇒ HS C + D (2 Hörsäle)

Aufbau: 6 Aufgaben, davon nur 4 bearbeiten $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$ Möglichkeiten, $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Korrektur: In der 1. vorlesungsfreien Woche + Einsichtnahmetermin

Nachklausurtermin: „voraussichtlich" Sa, 12.10, 10:15 – 11:45 h

Es gilt die „Freischuss"-Regelung: 2 Versuche → bessere Zensur zählt.

Infoblatt zur Klausur erscheint noch!!

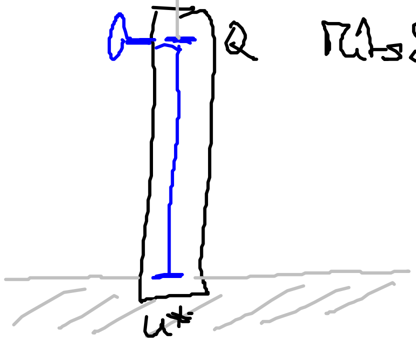
Zum 11. Blatt: Enthält Aufgaben, die noch klausurrelevant sind.

Möglichkeit einer Präsentation für Gruppen, die „dicht" am HA-Kriterium „entlangschrammen".

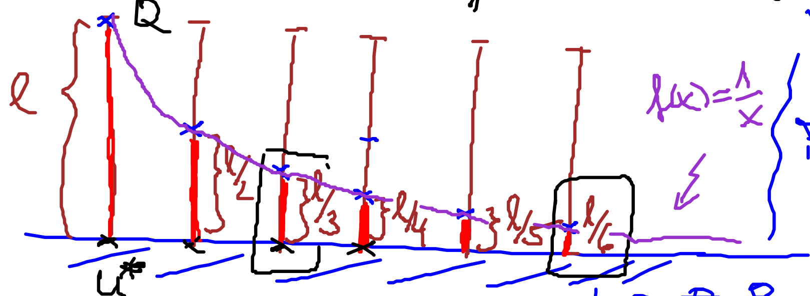
Präsentationstermin: Do, 04.07., 16:00 – 19:00 h
⇒ Räume im Π-Gebäude; nähere Info wird auf der Homepage hinterlegt.

Das hyperbolische „Halbgeradenmodell" und seine Realisierung in der Welt der Musik (alte pythagoräische Entdeckung)

Das Monochord (= „Einsaiten"-Instrument)

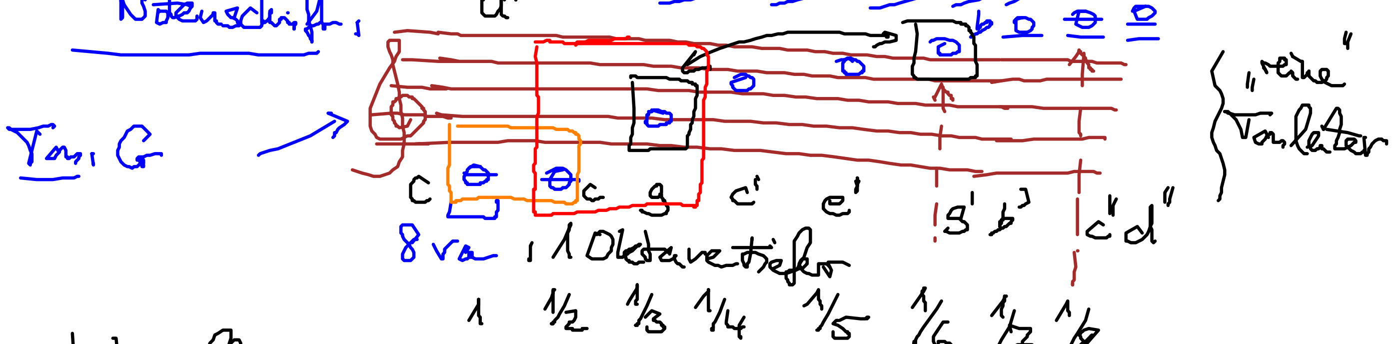


Mitschwingende Obertöne = „Naturtonreihe"



Harmonische Folge: $a_n = 1/n$

Notenschrift:



Intervalle: Relativer Tonabstand wird als Längen- bzw. Zahlverhältnis beschrieben!

Beispiele: Oktave: $\boxed{1:2} = 2:4 = \boxed{3:6}$ ← $= \frac{1/6}{1/3} = \frac{3}{6} = 3:6$

1/3 1/6

g g'

Quinte: $\boxed{2:3}$ „Schwesterintervall" (= dual) Quarte: $\boxed{3:4}$

c g

„Summe" = Oktave

Quintenzirkel: 12 Quinten führen auf dem Klavier zum selben Ton (= Taste) wie 7 Oktaven!

Halt: 12 Quinten $\left(\frac{2}{3}\right)^{12} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^{7}$ 7 Oktaven geom. Folge | Zahlentheorie

Andernfalls wäre ja $2^{12+7} = 2^{19} = 3^{12}$ ↯

Also: Die reine (pythagoräische) Stimmung macht Probleme!!

Ausweg: Von Stevin (16. Jh). Frage: Wie teile ich die Oktave in 12 „gleichgroße" Intervalle (Halbtonschritte)?

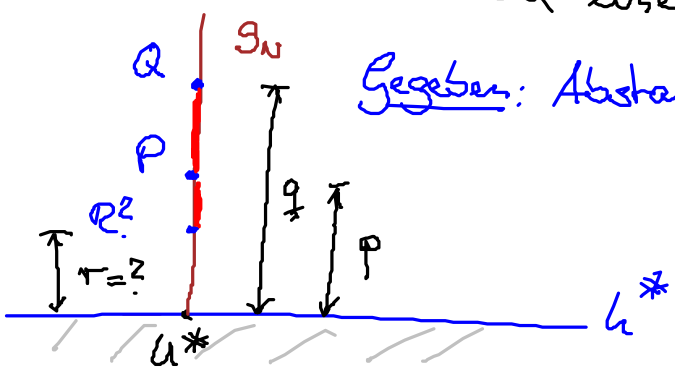
Dann ist eine Quinte = 7 Halbtöne

Gesucht: „Halbtonlänge" x, so dass gilt: $\boxed{\underbrace{x^{12}}_{12\ \text{Halbtöne}} = \underbrace{\frac{2}{1} = 2:1}_{\text{Oktave}}}$

Lösung: $\boxed{x = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12}}$ irrational!

Quinte $= (\sqrt[12]{2})^7 = \underset{1{,}4983\ldots}{2^{7/12}} \approx \frac{3}{2} = 1{,}5$

Übertragen auf das Poincarémodell einer (euklidischen) Halbgeraden:



Gegeben: Abstand $d = d_N(Q,P) = 2\left|\ln\left(\frac{q}{p}\right)\right| = 2|\ln(q) - \ln(p)|$

Gesucht: R mit

$d_N(P,R) = d_N(Q,P)$, $P \in \overline{QR}_N$

bzw. $d_N(Q,R) = 2\cdot d_N(Q,P) = 2d$

$$\iff 2\left|\ln\left(\frac{q}{r}\right)\right| = 4\cdot\left|\ln\left(\frac{q}{p}\right)\right| = 2d$$

$$\implies \ln\left(\frac{q}{r}\right) = 2\cdot\ln\left(\frac{q}{p}\right) = \ln\left[\left(\frac{q}{p}\right)^2\right]$$

$$\xRightarrow{\exp()} \frac{q}{r} = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \implies \boxed{r = q\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^2} =$$

n-facher Abstand!

Analog: $R \in g_N$ mit $P \in \overline{QR}_N$, $\boxed{d_N(Q,R) = n\cdot d(Q,P)}$

$$\implies 2\cdot\left|\ln\left(\frac{q}{r}\right)\right| = 2n\cdot\left|\ln\left(\frac{q}{p}\right)\right| \implies \frac{q}{r} = \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

Ende der Vorlesung!!

$$\implies \boxed{r = q\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n}$$ Geom. Folge!!

(Danke für Ihre „akustische" Aufmerksamkeit und an Ihre „logarithmischen" Ohren.)