Vorlesung vom 25.04.2013:

Vorweg: Ersatztermin für die Tutorien, die Fr, 17.05., und Mo, 20.05., (Pfingsten) ausfallen:

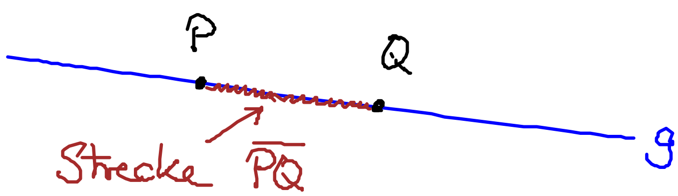
$\Longrightarrow$ Di, 21.05., $16^{00}-18^{00}$ als Zentrale Übung !!

Klausurtermin (nach Besprechung mit Tutoren):

$\boxed{\text{Do., 11.07., } 12^{00}-14^{00}}$ (= letzter Vorlesungstermin)

Strecken, Halbgeraden bzw. „Strahlen":

Seien $P, Q \in \mathcal{E}$ und $g = PQ$ die nach Ax (II) existierende eindeutige Verbindungsgerade durch P und Q



Strecke $\overline{PQ} \subseteq PQ$ definieren wir mittels

$$\overline{PQ} = \{X \in \mathcal{E} \mid P \leq_g X \leq_g Q \vee Q \leq_g X \leq_g P\}$$

Bezugsmenge für X!

$$= \{X \in PQ \mid P \leq_g X \leq_g Q \vee Q \leq_g X \leq_g P\}$$

$\subseteq PQ$

$$P \leq_g X \leq_g Q \Leftrightarrow P \leq_g X \wedge X \leq_g Q$$

Falls $g = PQ$ (d.h. $P \neq Q$) und $R \in g$, dann:

$$\overline{PR} = \{X \in PQ \mid P \leq_g X \leq_g R\}$$

„Erweiterung", damit einpunktige Strecken $\overline{PP} = \{P\}$ zugelassen ist.

Bemerkung: „$\vee$" (oder) in der Definition ist notwendig, da wir von vornherein 2 mögliche Durchlaufrichtungen auf $g = PQ$ und uns bezüglich der Lage von P, Q nicht festgelegt haben.

In Beweisen legt man sich gern in der Formulierung „Sei o.B.d.A. $P \leq_g Q$." auf eine Richtung fest

↗ „ohne Beschränkung der Allgemeinheit"

„heißt hier soviel wie: Der Fall „$Q \leq_g P$" läuft analog zu $P \leq_g Q$.

Definition der Halbgeraden bzw. des Strahls:

Seien $P, Q \in \mathcal{E}$, $P \neq Q$ und $g = PQ \in \mathcal{G}$. Dann ist die Halbgerade mit Anfangspunkt P durch Q definiert als

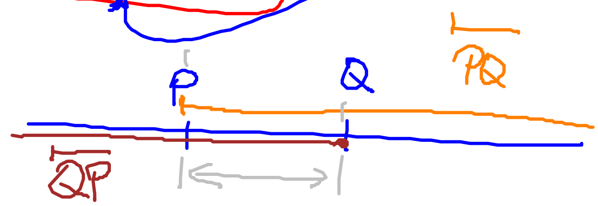
$$\overset{\vdash}{PQ} := \begin{cases} \{X \in PQ \mid P \leq_g X\}, & \text{falls } P \leq_g Q \\ \{X \in PQ \mid X \leq_g P\}, & \text{falls } Q \leq_g P \end{cases}$$

Anfangspunkt

beidseitig die spezielle Lage von P, Q bezüglich „$\leq_g$"

Oder: $\boxed{\overset{\vdash}{PQ} = \{X \in PQ \mid X \in \overline{PQ} \vee Q \in \overline{PX}\}}$ X liegt „hinter" Q

Dann: $\boxed{\overline{PQ} = \overset{\vdash}{PQ} \cap \overset{\vdash}{QP}}$



Axiom (V): Streckenmaßaxiom = „Einführung des skalierten Lineals"

Es gibt eine Funktion $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Symmetrie: $\boxed{d(P,Q) = d(Q,P)}$ für alle $P, Q \in \mathcal{E}$

(2) Additivität auf unterteilten Strecken:

$\forall \overline{PQ} \subset \mathcal{E} \ \forall R \in \overline{PQ}: \boxed{d(P,Q) = d(P,R) + d(R,Q)}$

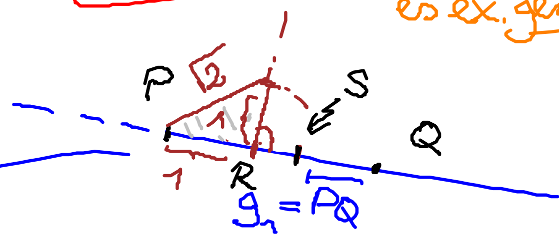
(3) Eindeutige Abtragbarkeit auf jedem Strahl:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{PQ}\ \forall a\in\mathbb{R}_0^+\ \exists!\, A\in \overrightarrow{PQ}:\ d(P,A)=a}$$

es ex. genau ein

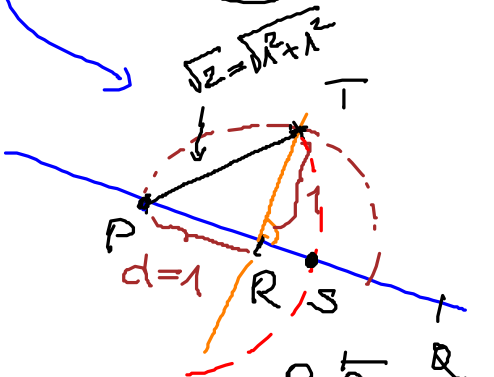
Existenz- und Eindeutigkeitssatz in Bezug auf Punkte auf $\overrightarrow{PQ}$

z.B.:



$a=\sqrt{2}$; Konstruktion von S mit $d(P,S)=\sqrt{2}$, falls man Euklidische Geometrie voraussetzt

Folgerung zu (V): Jede Gerade bzw. jede Halbgerade besteht aus unendlich vielen Punkten, genauer aus überabzählbar vielen Punkten, d.h. hat als Punktmenge dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$.



$R\in\overrightarrow{PQ}$ mit $d(P,R)=1$

S als Schnittpunkt des Kreises um P mit Radius $r=\sqrt{2}$ mit $g_1=\overrightarrow{PQ}$ liefert mir den Punkt zum Abstand $d(P,S)=\sqrt{2}$.

Wir hätten gern, dass die Abbildung $d: \mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathbb{R}_0^+=[0,\infty[$ alle Metrikeigenschaften erfüllt.

$d: M\times M\to\mathbb{R}$ heißt Metrik auf M und (M,d) ein metrischer Raum, falls:

(M1) $\forall P,Q\in M$: $\boxed{d(P,Q)=0 \Leftrightarrow P=Q}$ „Eindeutigkeit des Nullabstands"

(M2) $\forall P,Q\in M$: $\boxed{d(Q,P)=d(P,Q)}$ Symmetrie

(M3) $\forall P,Q,R\in M$: $\boxed{d(P,Q)\le d(P,R)+d(R,Q)}$ Δ-Ungleichung

Behauptung: Unsere Abstandsfunktion erfüllt die 3 Metrikeigenschaften.

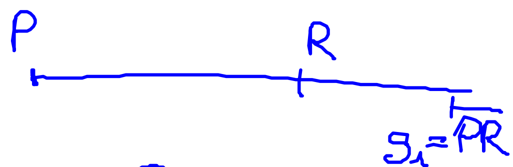
Beachte: (M2) gilt per definitionem.

(M1): Seien $P, Q \in g_1 = \overrightarrow{PR}$ auf einer Halbgeraden g_1.

„$\Leftarrow$": z.z.: $P = Q \Rightarrow d(P,Q) = 0$ bzw. $d(P,P) = 0$

„$\Rightarrow$": z.z.: $d(P,Q) = 0 \Rightarrow P = Q$

Verwende die Eigenschaft der Additivität (2) aus (E).



$P = Q \in g_1 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP} = \{P\}}$

Mit $R = P \in \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP}$ hat man

wegen $P = R = Q$: $d(P,Q) = d(P,R) + d(R,Q)$

$\Leftrightarrow \quad d(P,P) = d(P,P) + d(P,P) = 2\,d(P,P)$

$\xRightarrow{-d(P,P)} \quad 0 = d(P,P)$ ∎

Jetzt „$\Rightarrow$": Warum folgt aus $d(P,Q) = 0 \Rightarrow P = Q$ auf g_1?

Wir wissen jetzt: $d(P,P) = 0$; andererseits $d(P,Q) = 0$ und $P, Q \in g_1$. Die eindeutige Abtragbarkeit von $d(P,\cdot)$ auf g_1 (siehe (3) in (E)) garantiert für $a = 0$: $P = Q$ ∎

Zur Δ-Ungleichung (M3): Wird zunächst für den kollinearen Fall in Aufgabe Ü8 (→ Tutorium) bewiesen.!

Mehr am kommenden Dienstag!!

ENDE...