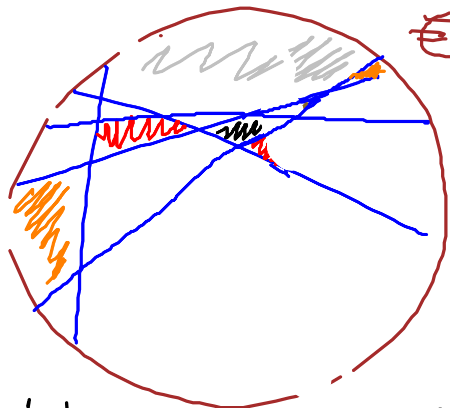
Vorlesung vom 23.05.2013:

Tipp zur Hausaufgabe 22(b):

n Geraden, die sich jeweils paarweise, aber nicht zu dritt in einem Punkt schneiden, zerlegen die Ebene in $\binom{n+1}{2}+1$ konvexe nichtleere Teilmengen. (Beachte: Per Definition ist die leere Menge auch konvex, wird aber nicht „mitgezählt".)

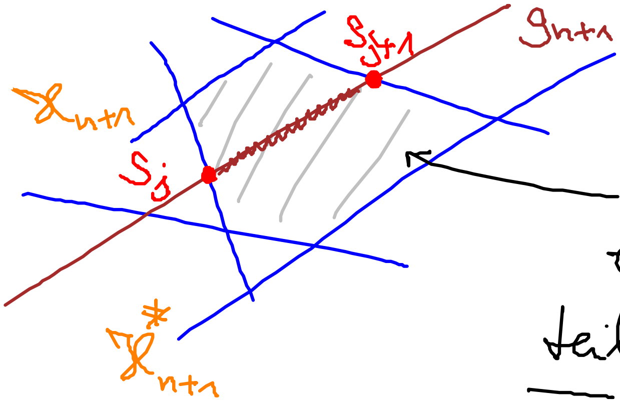
„Pizza"-Skizze:



€ $n=5$ gerade Schnitte ergeben $\binom{n+1}{2}+1=\binom{6}{2}+1=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}+1=16$ Teile!

Im Beweis (Induktionsschritt): Aus Teil (a) im Beweis weiß man schon: Die $(n+1)$-te Gerade g_{n+1} wird durch g_1 bis g_n in $n+1$ Teile zerlegt ($n-1$ Strecken plus 2 Halbgeraden.
Zu argumentieren bleibt, dass jedes dieser $n+1$ Teile eine vorhandene konvexe Teilmenge aus der I.V. (=Induktionsvoraussetzung)

in genau 2 nichtleere konvexe Teilmengen zerlegt



vorhandene konvexe Teilmenge K_i aus $\mathcal{E} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} g_k$. Dann wäre für das Streckenteil $\overline{S_j S_{j+1}} \subseteq g_{n+1}$ zu begründen:

$\overline{S_j S_{j+1}} \setminus \{S_j, S_{j+1}\} \subseteq K_i$. Dann folgt für die beiden Halbebenen $\mathcal{H}_{n+1}$ und $\mathcal{H}^*_{n+1}$ zu g_{n+1}:

$$K_i \setminus \overline{S_j S_{j+1}} = \underbrace{(K_i \cap \mathcal{H}_{n+1})}_{\neq \emptyset,\ \text{konvex}} \cup \underbrace{(K_i \cap \mathcal{H}^*_{n+1})}_{\neq \emptyset,\ \text{konvex}}.$$

Begründe:

Fazit: Durch g_{n+1} kommen in der Anzahl $n+1$ konvexe Teilmengen dazu!!

Zum Kapitel § 3 (Skript):

Wir untersuchen die „strukturerhaltenden" bijektiven Abbildungen $\alpha: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ als Teilmenge der Menge aller bijektiven Abbildungen von $\mathcal{E}$ auf sich, Permutationen genannt.

$$\boxed{\mathcal{P} := \{\alpha: \mathcal{E} \to \mathcal{E} \mid \alpha \text{ bijektiv}\}}$$

Konvention:

$\alpha P = \alpha(P)$ Bildpunkt

$\alpha g = \alpha(g) = \{\alpha P \mid P \in g\}$ Bildmenge

Falls $\underbrace{g = PQ}$, dann ist $\alpha P \alpha Q = \alpha(P)\alpha(Q) = h \in \mathcal{G}$

Verbindungsgerade zwischen P und Q Verbindungsgerade zwischen Bildpunkten

Für allgemeines $\alpha \in \mathcal{P}$ ist nicht unbedingt

$$\alpha(\underbrace{PQ}_{=g}) = \alpha g \overset{??}{=} h = \alpha P \alpha Q$$

Wichtig! Das klappt nur, falls α Geraden wieder auf Geraden abbildet. Das wäre „strukturerhaltend" im Sinne der Geometrie! Kurz gesagt: Geradentreue ist gefordert!!

Kurzschreibweise!!

<u>Zudem</u>: $\quad \alpha, \beta \in \mathcal{P} \implies (\alpha \circ \beta)(P) =: \alpha\beta P$

Aufgrund der Axiome ($\overline{\underline{V}}$) und ($\overline{\underline{VII}}$) haben wir ein Längenmaß $d(.,.)$ und ein Winkelmaß $\omega(.)$ gegeben. Im Sinne der Strukturerhaltung fordern wir neben der Geradentreue:

(i) Längentreue : $\boxed{\forall P, Q \in \mathcal{E} : d(\alpha P, \alpha Q) = d(P, Q)}$

(ii) Winkelmaßtreue : $\boxed{\forall \mathcal{W} \in \Omega_{P(\mathcal{E})} : \omega(\alpha \mathcal{W}) = \omega(\mathcal{W})}$

Bild des Winkelfeldes $\mathcal{W} \in \Omega_{P(\mathcal{E})}$

für $\alpha \in \mathcal{P}$.

Statt (i) kann man „schwächer" fordern:

(i') Längenverhältnistreue: $\boxed{\forall P, Q, R \text{ mit } Q \neq R : \frac{d(\alpha P, \alpha R)}{d(\alpha Q, \alpha R)} = \frac{d(P, R)}{d(Q, R)}}$

Das ist äquivalent zu: $\boxed{\exists k \in \mathbb{R}^+ \; \forall P, Q : d(\alpha P, \alpha Q) = k\, d(P, Q)}$

Für $k = 1$ hat man speziell die Längentreue!!

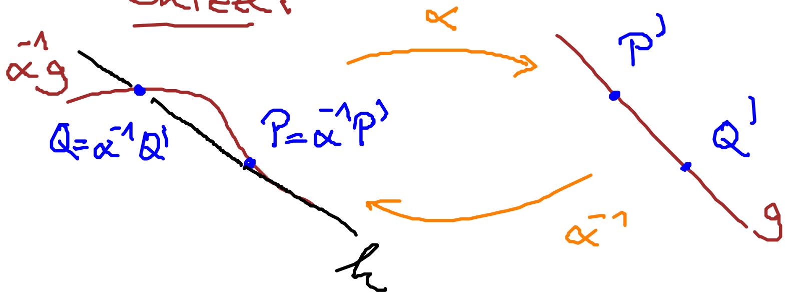
Aufgabe 3.1 (Skript): Zeige, dass die (existierende) Umkehrabb. $\alpha^{-1}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ einer geraden- und längentreuen Permutation $\alpha: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ auch geraden- und längentreu ist.

Beweis: α geradentreu: $\forall g \in \mathcal{G}: \alpha g = \tilde{g} \in \mathcal{G}$

α längentreu: $\forall P, Q \in \mathcal{E}: d(\alpha P, \alpha Q) = d(P, Q)$

(i) z.z.: $\forall g \in \mathcal{G}: \alpha^{-1} g \in \mathcal{G}$ $\qquad$ || $\alpha^{-1}g$: Urbild von g unter α!

Skizze:



Seien (Ax I) $P', Q' \in \mathcal{E}$ mit $P' \neq Q'$ und $g = P'Q'$. Dann gilt: $P = \alpha^{-1}P'$, $Q = \alpha^{-1}Q' \in \alpha^{-1}g$. Dann gilt für die Verbindungsgerade $h = PQ \in \mathcal{G}$:

$$\alpha h = \alpha(PQ) \underset{\uparrow}{=} \alpha P \alpha Q = P'Q' = g \overset{\alpha^{-1}(\,)}{\Longrightarrow} \underbrace{\alpha^{-1}\alpha}_{=\mathrm{id}} h = h = \alpha^{-1} g$$

α ist geradentreu!!

(ii) z.z.: $\forall P, Q \in \mathcal{E}: d(\alpha^{-1}P, \alpha^{-1}Q) = d(P, Q)$

Es gilt für $P' = \alpha^{-1}P$ und $Q' = \alpha^{-1}Q$:

$$d(\alpha^{-1}P, \alpha^{-1}Q) = d(P', Q') \underset{\nearrow}{=} d(\alpha P', \alpha Q') = d(\underbrace{\alpha\alpha^{-1}}_{=\mathrm{id}}P, \underbrace{\alpha\alpha^{-1}}_{=\mathrm{id}}Q)$$

α ist längentreu

$$= d(P, Q) \quad \blacksquare$$

Definition Kongruenzabbildung:

$\alpha: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ bijektiv heißt KA (= Kongruenzabbildung), falls α (i) geradentreu, $\underbrace{\text{(ii) längentreu und (iii) winkelmaßtreu}}_{\text{zusammen: maßtreu!!}}$ ist.

Dazu mehr nächste Woche!