Vorlesung vom 23.04.13:

Kap 1 weiter:

Satz 1.3: $\boxed{\forall g \in \mathcal{G}\ \forall h \in \mathcal{G}:\ g \neq h \Rightarrow (g \cap h = \emptyset \vee \exists S \in \mathcal{E}: g \cap h = \{S\})}$

‖ Zwei voneinander verschiedene Geraden $g, h \in \mathcal{G}$ besitzen höchstens einen gemeinsamen (Schnitt-)Punkt $S \in \mathcal{E}$.

Beweis (indirekt):

← besser: Kontraposition!!

$\boxed{A \to B \vee C}$ mit A: „$g \neq h$", B: „$g \cap h = \emptyset$", C: „$\exists S \in \mathcal{E}: g \cap h = \{S\}$"

freier: Sind g und h verschieden, dann besteht $g \cap h$ aus einem Punkt.

Kontraposition: Falls $g \cap h$ mindestens zwei Punkte enthält, dann folgt $g = h$

Das ist aber Axiom (I), d.h. die Kontraposition gilt!! ∎

Bemerkung: Logisch schreibt sich „unsere" Kontraposition als

$$\forall g \in \mathcal{G}\ \forall h \in \mathcal{G}: (\underbrace{g \cap h \neq \emptyset}_{\neg B} \wedge \underbrace{\forall S \in \mathcal{E}: g \cap h \neq \{S\}}_{\neg C}) \Rightarrow \underbrace{g = h}_{\neg A}$$

$A \to B \vee C$

$\Leftrightarrow \neg(B \vee C) \to \neg A$

$\Leftrightarrow \neg B \wedge \neg C \to \neg A$

Satz 1.4: Die Relation „∥" zwischen Geraden in $\mathcal{G}$ ist auf $\mathcal{G}$ (i) reflexiv und (ii) symmetrisch

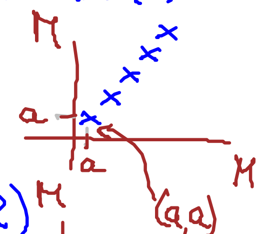
Bemerkung: Eine Relation auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$.

Hier: $\parallel \subseteq \mathcal{G}\times\mathcal{G}$; $\parallel = \{(g,h) \mid g\parallel h\} \subseteq \mathcal{G}\times\mathcal{G}$ // zweistellige Relation

Wichtige Relationen sind Äquivalenzrelationen. Sie sind durch 3 Eigenschaften (wir könnten sagen: „Äquivalenzaxiome") festgelegt:

(i) Reflexivität: Allgemein für $aRb :\Leftrightarrow (a,b)\in R \subseteq M\times M$:

$$\forall a\in M: \; aRa \quad (\Leftrightarrow (a,a)\in R)$$

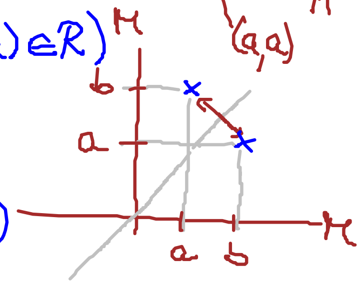


(ii) Symmetrie: $\forall a,b\in M: \; aRb \Leftrightarrow bRa$

$$(\Leftrightarrow (a,b)\in R \Leftrightarrow (b,a)\in R)$$

(iii) Transitivität: $\forall a,b,c\in M: \; aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

$$(\Leftrightarrow (a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R)$$



Man fasst dann die zu einem Element $a\in M$ in Relation stehenden Elemente $a'\in M$ zu einer Äquivalenzklasse zusammen und nennt jedes a' aus dieser Äquivalenzklassen einen Repräsentanten (=Vertreter).

Bezeichnung: $[a] := \{a'\in M \mid a'Ra\}$; insbesondere ist $a\in[a]$

Es gilt: M „zerfällt" in die verschiedenen Äquivalenzklassen bezügl. R, d.h.

(i) $\bigcup_{a\in M}[a] = M$

(ii) $\forall a,b\in M: \; [a]\cap[b]=\emptyset \vee [a]=[b]$ $\quad A\vee B$

$$(\Leftrightarrow [a]\cap[b]\neq\emptyset \Rightarrow [a]=[b]) \quad \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow B$$

Zurück zum Beweis zu Satz 1.4:

a) z.z.: „∥" ist reflexiv, d.h.: $\forall g \in \mathcal{G} : g \parallel g$.
Gilt, da immer $g = g$ wahr ist ✓

b) z.z.: „∥" ist symmetrisch, d.h.: $\forall g, h \in \mathcal{G} : g \parallel h \Rightarrow h \parallel g$
Gilt, da für alle $g, h \in \mathcal{G}$: $g = h \Leftrightarrow h = g$ bzw.
$g \cap h = h \cap g$, also: $\underbrace{g \cap h}_{} = \emptyset \Leftrightarrow \underbrace{h \cap g}_{} = \emptyset$ $=$

<u>Bemerkung</u>: Die Eigenschaft „transitiv" für „∥" hängt eng mit dem Parallelenaxiom zusammen, ist zu diesem sogar logisch äquivalent (siehe Tutorium bzw. 1. Ü-Blatt)

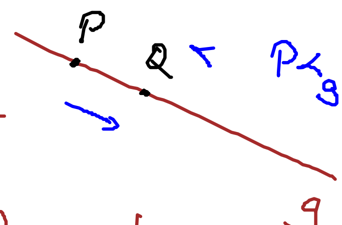
Wir kommen im Zusammenhang mit Axiom (IV) auf eine zweite wichtige „Gruppe" von Relationen:

Ordnung(srelation) und strenge Ordnung(srelation)

<u>Vorbild</u> in $\mathbb{R}$: „$\leqq$" „$<$"

$\boxed{a \leqq b :\Leftrightarrow a < b \vee a = b}$ ⟷ $\boxed{a < b :\Leftrightarrow a \leqq b \wedge a \neq b}$

Strenge Ordnung „$\overset{R}{<}$" auf $M \neq \emptyset$ wird axiomatisch definiert durch folgende 3 Eigenschaften:



$P <_g Q$

(i) $\boxed{\forall a \in M : \neg(a < a)}$ <u>Areflexivität</u>

$\neg(aRa)$

(ii) $\boxed{\forall a, b \in M : \quad a < b \Rightarrow \neg(b < a)}$ Asymmetrie

$\Leftrightarrow \neg(a < b) \vee \neg(b < a) \Leftrightarrow \neg((a < b) \wedge (b < a))$

<u>Also</u>: Es kann nicht gleichzeitig $a < b$ und $b < a$ gelten.

(iii) $\boxed{\forall a, b, c \in M : \; a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c}$ Transitivität

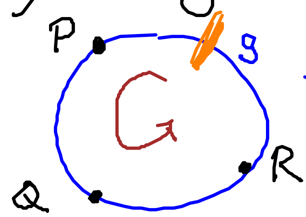
Für die nicht strenge Ordnung „$\leq$" gilt:

(i) $\boxed{\forall a \in M : \quad a \leq a}$ Reflexivität

(iii) Transitivität ✓

(ii) $\boxed{\forall a, b \in M : \; a \leqq b \wedge b \leqq a \Rightarrow a = b}$ Antisymmetrie

Falls ich mit Axiom $\boxed{\text{IV}}$ auf jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ eine (strenge) Ordnungsrelation „$<_g$" einführen kann, welche Geradenmodelle sind dann ausgeschlossen? „Kreise"



Oder anders argumentiert:

$$\underbrace{P <_g Q \wedge Q <_g P}_{\text{transitiv!}} \Rightarrow P <_g P \quad ↯$$

Hier: $P <_g Q \wedge Q <_g R$

$\Rightarrow P <_g R$, aber zugleich $R <_g P$

Verletzung Asymmetrie!

Mittels Anordnung auf einer Geraden kann man jetzt Strecke und Halbgerade / Strahl einführen $\Longrightarrow$ Donnerstag mehr dazu!

ENDE der Vorlesung!!