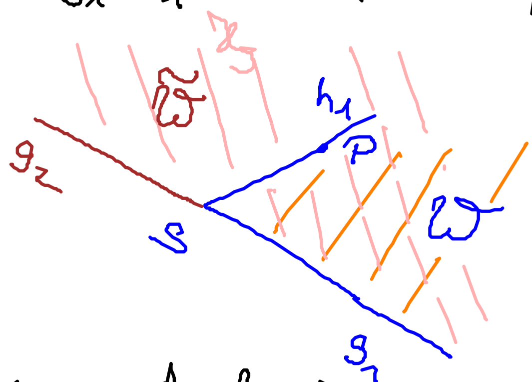
Vorlesung vom 21.05.2013:

Beweis zu Satz 2.13:

Sei $\mathcal{W} = \sphericalangle g_1 h_1$ echtes Winkelfeld mit $g_1 \cap h_1 = \{S\}$ (= Scheitelpunkt)

D.h.: $\mathcal{W}$ ist weder eine Halbgerade noch ein gestrecktes WF, also abgeschlossene Halbebene.



Sei $g = g_1 \cup g_2$ und $\mathcal{H}_g$ die HE zu g mit $h_1 \subseteq \mathcal{H}_g$.

Insbesondere ist dann: $\mathcal{W} \subseteq \overline{\mathcal{H}_g} = g \cup \mathcal{H}_g$.

Nun gilt: h_1 zerlegt $\overline{\mathcal{H}_g}$ in zwei Teilwinkelfelder $\mathcal{W}$ und $\tilde{\mathcal{W}}$ mit $\mathcal{W} \cup \tilde{\mathcal{W}} = \overline{\mathcal{H}_g}$, $\mathcal{W} \cap \tilde{\mathcal{W}} = h_1 = \overline{SP}$. Dann (Additivität des Winkelmaßes):

$\omega(\mathcal{W}) + \omega(\tilde{\mathcal{W}}) = \omega(\overline{\mathcal{H}_g}) \in [0,180]$, also: $\underbrace{\omega(\mathcal{W})}_{>0} + \underbrace{\omega(\tilde{\mathcal{W}})}_{>0} \leq 180$

$\omega(\mathcal{W}) > 0$, $\omega(\tilde{\mathcal{W}}) > 0$, $\boxed{\text{da beide kein NWF}}$, da $\in [0,180]$

$$\Rightarrow \quad 0 < \omega(\mathcal{W}) < \omega(\mathcal{W}) + \underbrace{\omega(\tilde{\mathcal{W}})}_{>0} \leq 180$$ ■

Zur logischen Argumentation im Beweis zu Satz 2.14 (Skript):

Satz 2.12: $\omega(\mathcal{W}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{W} = \sphericalangle g_1 g_1$ ist NWF

Satz 2.13: $\mathcal{W} \in \Omega$ echtes WF $\Rightarrow \omega(\mathcal{W}) \in]0,180[$

Beachte: Es gilt stets: $\omega(\mathcal{W}) \in [0,180]$

Zusammen: $\mathcal{W} \in \Omega$ NWF oder echtes WF $\Rightarrow 0 \leq \omega(\mathcal{W}) < 180$ (*)

Aussage der Form: $(A \vee B) \to C$

Kontraposition: $\neg C \to \neg(A \vee B)$ De Morgan

$\Leftrightarrow \boxed{\neg C \to (\neg A \wedge \neg B)}$

$D \to E \Leftrightarrow \neg E \to \neg D$ Kontraposition!

Also ist (*) logisch äquivalent zur Aussage:

$$\boxed{\omega(W) = 180 \Rightarrow W \in \Omega \text{ ist weder NWF noch echtes WF} \Rightarrow W \text{ ist gestrecktes WF.}}$$

Ist $W = \overline{\mathcal{H}}_g$ umgekehrt ein gestrecktes WF, so wäre wegen (*) für jedes echte Teilwinkelfeld $W_1 \subsetneqq W$: $\omega(W_1) < 180$.
Da aber auch W selbst ein Winkelmaß $\omega(W) \leq 180$ besitzen muss und alle Teilwinkelfelder $W_1 \subsetneqq W$ nur $\omega(W_1) < 180$ liefern, muss zu dem Maß 180 $W = \overline{\mathcal{H}}_g$ selbst gehören als Urbild zu dieser Maßzahl ∎

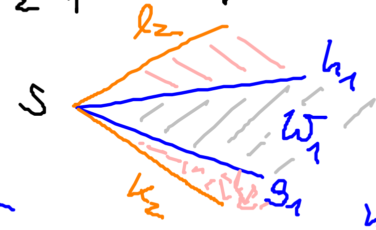
Bemerkung zum Beweis des Monotoniesatzes 2.15:

$$W_1, W_2 \in \Omega_{S(E)} \text{ mit } W_1 \subsetneqq W_2 \Rightarrow \omega(W_1) < \omega(W_2)$$

WFe als Mengen! Winkelmaße als Zahlen!

$W_1 = \sphericalangle g_1 h_1$, $W_2 = \sphericalangle k_2 l_2$ mit $W_1 \subsetneqq W_2$ führt auf die Zerlegung

$$W_2 = \sphericalangle k_2 l_2 = \sphericalangle k_2 g_1 \cup \sphericalangle g_1 h_1 \cup \sphericalangle h_1 l_2$$



mit $k_2 \neq g_1$ oder $l_2 \neq h_1$, denn sonst wäre $W_1 = \sphericalangle k_2 l_2 = W_2$ ↯

Also: $\sphericalangle k_2 g_1$ kein NWF oder $\sphericalangle h_1 l_2$ kein NWF (oder beide)

$$\Rightarrow \omega(\sphericalangle k_2 g_1) > 0 \text{ oder } \omega(\sphericalangle h_1 l_2) > 0 \Rightarrow \omega(\sphericalangle k_2 g_1) + \omega(\sphericalangle h_1 l_2) > 0$$

Dann mit Additivität des Winkelmaßes in Ax (VII):

$$\omega(W_2) = \underbrace{\omega(\sphericalangle k_2 g_1)}_{>0} + \omega(W_1) + \underbrace{\omega(\sphericalangle h_1 l_2)}_{>0} > \omega(W_1)$$

Voilà! ∎