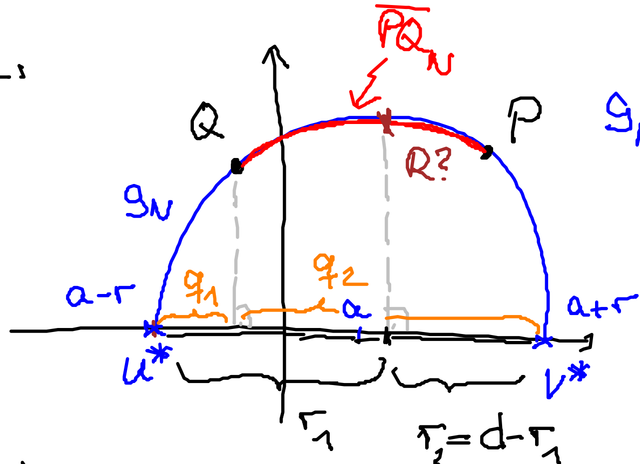
Vorlesung vom 20.06.2013:

· Zum aktuellen 9. Blatt !!

Zu H35(b): Um $R=(z_1,z_2)\in \overline{PQ}_N \subseteq g_N$ mit $d_N(P,R)=\frac{1}{2}\underbrace{d_N(P,Q)}_{\text{Siehe (a)!}}=\frac{1}{2}\rho$ zu ermitteln, benötigt man die Abstände $r_1, r_2=d-r_1$, wobei d der euklidische Durchmesser von g_N.

Skizze:



$g_N=\overline{PQ}_N$: $(x-a)^2+y^2=r^2$ aus Teil (a)

Ansatz:

$$d_N(P,R)=\left|\ln\left(\frac{p_1}{p_2}:\frac{r_1}{d-r_1}\right)\right| \overset{!}{=} \frac{1}{2}\underbrace{\left|\ln\left(\frac{p_1}{p_2}:\frac{q_1}{q_2}\right)\right|}_{=:\rho \,\leftarrow\, \text{Teil (a)!!}}=\frac{1}{2}\rho$$

Gleichung nach „r_1" umstellen!!

Dann folgt für $R=(z_1,z_2)$:

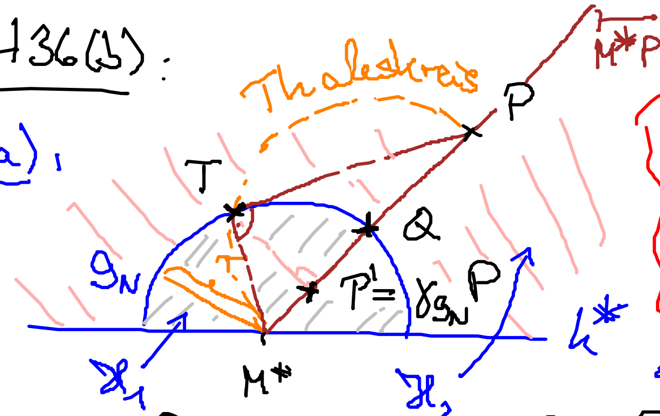
$$a-r+z_1=r_1 \implies \boxed{z_1=r_1-(a-r)=r_1-a+r} \,!!$$

z_1 eingesetzt in g_N-Gleichung liefert z_2:

$$R\in g_N: \quad (z_1-a)^2+z_2^2=r^2 \;!! \qquad z_2=\sqrt{r^2-(z_1-a)^2}>0.$$

Tipps zu H36(b):

Aus Teil (a):



weiß ich jetzt

$P' \in \overrightarrow{M^*P}$ mit $d(M^*,P)\cdot d(M^*,P') = r^2$

Warum?

(1) z.z.: $Q \in g_N \Rightarrow \gamma_{g_N} Q = Q' \overset{!}{=} Q$

Ax (V) kann zuhilfe genommen werden

(2) z.z.: Halbebenentreue vorausgesetzt ergibt:

$\gamma_{g_N}\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ sowie $\gamma_{g_N}\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1$ für $\mathcal{E}_N \setminus g_N = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$

Charakterisieren Sie die Zugehörigkeit eines Punktes $P \in \mathcal{E}_N \setminus g_N$ zu $\mathcal{H}_1$ bzw. zu $\mathcal{H}_2$.

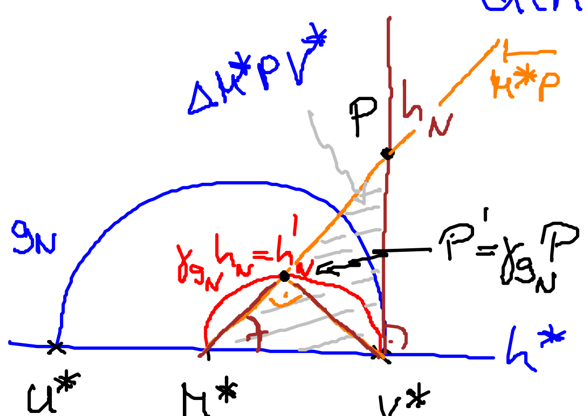
(3) z.z.: $P' = \gamma_{g_N} P$, $P'' = \gamma_{g_N} P' = \gamma_{g_N}\gamma_{g_N} P \Rightarrow P'' = P$!!

Zeige im Zwischenschritt: $P'' \in \overrightarrow{M^*P}$ mit $d(M^*,P'') = d(M^*,P)$

Ax (V)

Tipps zu H36(c):

Skizze:



z.z.: $\gamma_{g_N} h_N$ ist der euklidische Halbkreis über dem Durchmesser $\overline{M^*V^*}$!

D.h.: $\forall P \in h_N: \gamma_{g_N} P \in k_N$ mit k_N der beschriebene Halbkreis über $\overline{M^*V^*}$

Zeigen Sie über entsprechende Längenverhältnisgleichheit unter Berücksichtigung des gemeinsamen Winkelfeldes $\measuredangle P'M^*V^* = \measuredangle PM^*V^*$: $\Delta M^*P'V^* \sim \Delta M^*PV^*$ ähnlich

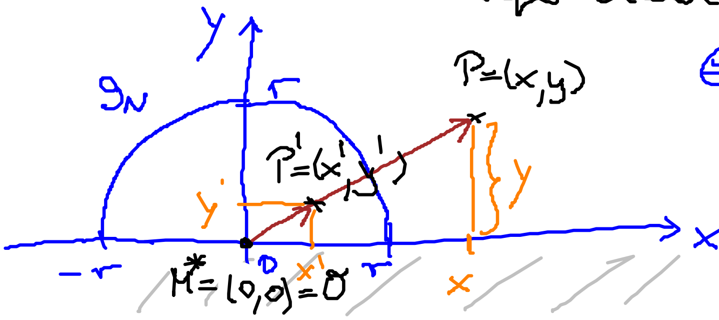
Dann folgt: $\omega(\measuredangle M^*P'V^*) = 90 = \omega(\measuredangle M^*V^*P)$

$\Longrightarrow$ $P' \in k_N$ mit k_N Kreis über $\overline{M^*V^*}$.

Umkehrung Thales!!

Aus $\gamma_{g_N}\gamma_{g_N} = id$ (siehe Teil (b)) folgt: $\gamma_{g_N} k = k_N$!! ∎

Jetzt Ü37(a) mithilfe Ü36(a):



$\mathcal{E}_N$ g_N: $x^2+y^2=r^2$. Zu $P=(x,y)\in\mathcal{E}_N$ wird $\gamma_{g_N}P = P'$ so konstruiert, dass gilt: (i) $P' \in \overline{M^*P} = \overline{OP}$,

(ii) $d(O,P)\cdot d(O,P') = r^2$

euklidischer Abstand!!

Außerdem:

(2) $\boxed{\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}$ da $P' \in \overline{OP}$

$\boxed{P=(x,y)}$; $P'=(x',y')$

$\Rightarrow d(O,P)=\sqrt{x^2+y^2}$

$d(O,P')=\sqrt{x'^2+y'^2}$

Es gilt: $d(O,P)\cdot d(O,P') = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2} \overset{!}{=} r^2$

$$\boxed{\Longrightarrow \sqrt{x'^2+y'^2} = \frac{r^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

Ergebnis (1)!

Wegen (2): $x'=\lambda x$, $y'=\lambda y$ für $\lambda>0$ geeignet.

Ergebnis (2)

Ziel ist zu zeigen: $x' = \frac{r^2\cdot x}{x^2+y^2} = \overset{=\lambda}{\frac{r^2}{x^2+y^2}}\cdot x$, $y' = \frac{r^2 y}{x^2+y^2} = \overset{=\lambda}{\frac{r^2}{x^2+y^2}}\cdot y$

$$\left.\begin{array}{l}x'=\lambda x\\ y'=\lambda y\end{array}\right\} \Rightarrow x'^2+y'^2 = \lambda^2x^2+\lambda^2y^2 = \lambda^2(x^2+y^2) \Longrightarrow \boxed{\sqrt{x'^2+y'^2} = \lambda\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$$

In Ergebnis (1) eingesetzt: $\sqrt{x'^2+y'^2} = \lambda\cdot\sqrt{x^2+y^2} \overset{!}{=} \frac{r^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(:\sqrt{\ })$ $\Longrightarrow \lambda = \frac{r^2}{\sqrt{\ }^2}$

bzw. $\boxed{\lambda = \frac{r^2}{x^2+y^2}}$

$$\Longrightarrow x' = \lambda\cdot x = \frac{r^2}{x^2+y^2}\cdot x, \quad y' = \lambda y = \frac{r^2}{x^2+y^2}\cdot y$$ ∎

Zu H37(b) und (c):

Folgere aus der Abb.-Vorschrift $\gamma_{g_N}(\underbrace{x,y}_{P}) = \overbrace{\left(\frac{r^2x}{x^2+y^2}, \frac{r^2y}{x^2+y^2}\right)}^{=P'}$:

(1) $(\gamma_{g_N}\circ\gamma_{g_N})(x,y) = \gamma_{g_N}(x',y') \overset{!}{=} (x,y) = id(x,y)$

Teil H(b)!!

(2) $P \in \mathcal{H}_1 \Leftrightarrow x^2+y^2<r^2 \Longrightarrow x'^2+y'^2>r^2 \Leftrightarrow P' \in \mathcal{H}_2$

P im „Innern" von g_N $\quad$ $P' = \gamma_{g_N} P$ im „Äußern" von g_N.

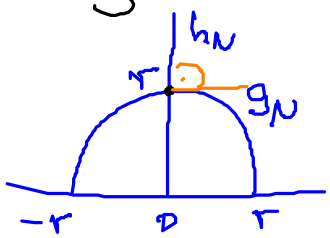
Gilt, wenn man z. B. definiert:

$$\mathcal{H}_1 = \{(x,y) \in \mathcal{E}_N \mid x^2+y^2<r^2\}$$ $\Leftarrow$ g_N: $x^2+y^2=r^2$

Teil (c) (3) $x^2+y^2=r^2 \Longrightarrow x'^2+y'^2=r^2$!! Zeige das!

Zu Ü37(d) und damit H37(e):

g_N: $x^2+y^2=r^2$. Dann gilt für alle Punkte $P=(x,y) \in h_N$: $x=0$



$$x=0 \Rightarrow x' = \frac{rx}{x^2+y^2} = \frac{r \cdot 0}{0^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

Bzw. wegen $\gamma_{g_N}\gamma_{g_N} = id_{\mathcal{E}_N}$:

$$(x',y') = \gamma_{g_N}(x,y) \Leftrightarrow \boxed{(x,y) = \gamma_{g_N}(x',y')}$$ Ist super verwendbar!

Hier:
$$x = 0 \overset{!}{=} \frac{r^2x'}{x'^2+y'^2} \Rightarrow r^2x' = 0\cdot(x'^2+y'^2) = 0 \Rightarrow x' = 0$$

Genauer: $x=0 \Leftrightarrow x'=0 \Longrightarrow \gamma_{g_N} h_N = h_N$

Im Fall k_N: $\boxed{(x-\sqrt{2})^2+y^2=1}$ (*) Wir ziehen das für $r>0$ allgemein durch...

$$x = \frac{r^2x'}{x'^2+y'^2},\ y = \frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}$$ Einsetzen in (*) $\Longrightarrow (x-\sqrt{2})^2+y^2 = \left[\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}-\sqrt{2}\right]^2 + \left[\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right]^2 = 1$

$$\Longrightarrow \frac{[r^2x'-\sqrt{2}(x'^2+y'^2)]^2 + r^4y'^2}{(x'^2+y'^2)^2} = 1$$

$\cdot (x'^2+y'^2)^2$

$$\Longrightarrow \underline{r^4 x'^2} - 2\cdot r^2 x' \sqrt{2}\,(x'^2+y'^2) + \overset{\shortparallel}{\sqrt{2}^2}\,(x'^2+y'^2)^2 + \underline{r^4 y'^2} = (x'^2+y'^2)^2$$

2. Binom!!

$= r^4(x'^2+y'^2)$

$(x'^2+y'^2)$ kann ausgeklammert werden!

$: (x'^2+y'^2)$

$$\Longrightarrow r^4 - 2\sqrt{2}\, r^2 x' + 2(x'^2+y'^2) = x'^2+y'^2$$

zusammenfassen!

$-(x'^2+y'^2)$

$$\Longrightarrow (x'^2+y'^2) - 2\cdot\sqrt{2}\, r^2 x' + r^4 = (x'^2 - 2\sqrt{2}\, r^2 x') + r^4 + y'^2 = 0$$

quadr. Ergänzung!!

$= -r^4$

$$\Longrightarrow \big[\underbrace{(x' - \sqrt{2}\, r^2)^2 - 2r^4}_{= x'^2 - 2\sqrt{2}\, r^2 x'}\big] + r^4 + y'^2 = 0 \xrightarrow{+r^4} (x' - \sqrt{2}\, r^2)^2 + y'^2 = r^4$$

$$\Longrightarrow \gamma_{g_N} k_N : \boxed{(x' - \sqrt{2}\, r^2)^2 + y'^2 = r^4}$$

ist euklidischer Halbkreis um den Mittelpunkt $M^* = (\sqrt{2}\, r^2, 0)$ mit Radius $R = r^2 > 0$.

Im Fall $r = 1$:

$$\gamma_{g_N} k_N : (x' - \sqrt{2})^2 + y'^2 = 1 \Longrightarrow \boxed{\gamma_{g_N} k_N = k_N} !!$$

Umgekehrt: Es gilt $\boxed{\gamma_{g_N} k_N = k_N \Longleftrightarrow r = 1}$

In der Hausaufgabe H37(e) verfahre man genauso!

Alternativer Weg: Die euklidische Kreisinversion (= Kreisspiegelung) „pflanzt" sich auf die Randgerade h^* von E_N fort.

Daher kann man auch so verfahren:

Sind u^*, v^* die Randpunkte von h_N (evtl. $u^* = \infty$), dann sind die Spiegelpunkte $(u^*)' = \gamma_{g_N} u^*$, $(v^*)' = \gamma_{g_N} v^*$ die Randpunkte von $\gamma_{g_N} h_N = h_N'$. Dabei dreht sich die Lage der beiden Punkte zueinander um: $u^{**} = (v^*)' = \gamma_{g_N} v^*$, $v^{**} = (u^*)' = \gamma_{g_N} u^*$.

Hier:

$$k_N: \ (x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{2}, \tilde{r} = 1 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u^* = (a-\tilde{r}, 0) = (\sqrt{2}-1, 0), \\ v^* = (a+\tilde{r}, 0) = (\sqrt{2}+1, 0) \end{array}}$$

$$\gamma_{g_N}(x,y) = \left(\frac{r^2 x}{x^2+y^2}, \frac{r^2 y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\Rightarrow u^{**} = \gamma_{g_N} v^* = \gamma_{g_N}(\sqrt{2}+1, 0) = \left(\frac{r^2 \cancel{(\sqrt{2}+1)}}{(\sqrt{2}+1)^{\cancel{2}} + 0^2}, \frac{r^2 \cdot 0}{(\sqrt{2}+1)^2 + 0^2}\right) = \left(\frac{r^2}{\sqrt{2}+1}, 0\right)$$

$$= \left(\frac{r^2 \cdot (\sqrt{2}-1)}{\underbrace{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}_{= \sqrt{2}^2 - 1 = 1}}, 0\right) = \left(r^2(\sqrt{2}-1), 0\right)$$

$$v^{**} = \gamma_{g_N} u^* = \gamma_{g_N}(\sqrt{2}-1, 0) = \left(\frac{r^2 \cancel{(\sqrt{2}-1)}}{(\sqrt{2}-1)^{\cancel{2}} + 0^2}, \frac{r^2 \cdot 0}{(\sqrt{2}-1)^2 + 0^2}\right) = \left(\frac{r^2}{\sqrt{2}-1}, 0\right)$$

$$= \left(\frac{r^2 (\sqrt{2}+1)}{\underbrace{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}_{= 2-1 = 1}}, 0\right) = \left(r^2(\sqrt{2}+1), 0\right)$$

$\Rightarrow$ $\gamma_{g_N} k_N$ ist der euklidische Halbkreis über dem Durchmesser $\overline{u^{**} v^{**}}$ mit euklidischem Mittelpunkt $M^{**} = (a, 0)$ und

$$a = \frac{1}{2}\left[r^2(\sqrt{2}-\cancel{1}) + r^2(\sqrt{2}+\cancel{1})\right] = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} r^2 \sqrt{2} = \sqrt{2} r^2 \quad \text{sowie Radius}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\left[r^2(\cancel{\sqrt{2}}+1) - r^2(\cancel{\sqrt{2}}-1)\right] = \frac{\cancel{2} r^2}{\cancel{2}} = r^2.$$

Daraus ergibt sich die Kreisgleichung für die Bild„gerade" $\gamma_{g_N} k_N$:

$$k_N' = \gamma_{g_N} k: \ (x'-a)^2 + y'^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \boxed{(x' - \sqrt{2} r^2)^2 + y'^2 = r^4}$$

Das ist dieselbe Gleichung, die wir vorher durch Einsetzen erhalten haben!!

ENDE der Vorlesung!