Vorlesung (mit Übungsanteilen) vom 18.06.2013.

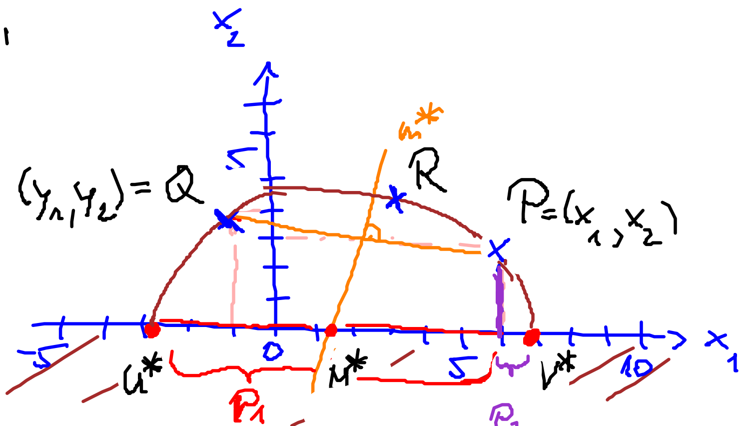
· Nichteuklidische Geometrie $\Longrightarrow$ Spiegelung an nichteuklidischen Geraden [= euklidische Kreisspiegelung (Inversion)] plus Längenmessung!

---

9. Blatt,

HA35,

a)



Gesucht: Gleichung der N-Geraden $g_N = \overline{PQ}_N$

Ansatz für die „rechnerische" Lösung:

$$\boxed{g_N: (x-a)^2 + y^2 = r^2}$$

P, Q einsetzen!

$$\boxed{M^* = (a, 0)}$$

Dann ergeben sich die „Randpunkte" U^*, V^*:

$U^* = (a-r, 0)$, $V^* = (a+r, 0)$

Durchmesser Kreis!

(*) $\boxed{d_N(P,Q) = \left|\ln\left(\frac{p_1}{p_2} : \frac{q_1}{q_2}\right)\right|}$ mit $p_1 = x_1 - \underbrace{(a-r)}_{x_1\text{-Koordinate zu } U^*}$, $p_2 = 2r - p_1 = (a+r) - x_1$.

Ebenso für Q! Dann einsetzen in (*).

b) Gesucht: Nichteuklidischer Mittelpunkt $R \in E_N$ zu $\overline{PQ}_N$.

Rechnerisch!

Also: 2 Bedingungen muss R erfüllen:

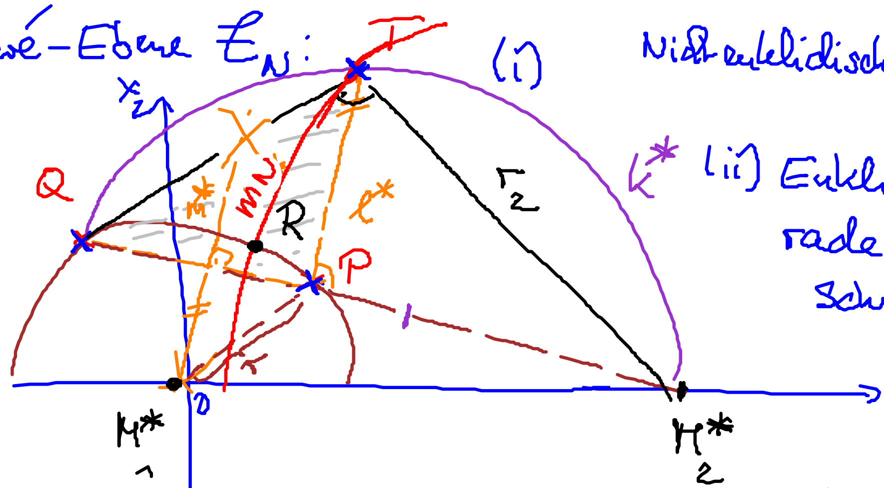
(i) $R \in g_N$, d.h. $\boxed{R = (z_1, z_2)}$ erfüllt die Gleichung der Geraden g_N aus (a).

(ii) $\boxed{d_N(P,R) = d_N(R,Q) = \frac{1}{2}\, d_N(P,Q)}$ Ergebnis aus (a)

Auf diese Weise wird R rechnerisch ermittelt.

Zur „zeichnerischen" Lösung des Problems, ← Aufgabe Ü 34(a)!!

Konstruktion der nichteuklidischen Mittelsenkrechten zu $\overline{PQ}_N$ in der Poincaré-Ebene E_N:



(i) Nichteuklidische Verbindungsgerade $g_N = PQ_N$

(ii) Euklidische Verbindungsgerade $h^* = PQ$ ergibt im Schnitt mit der Randgeraden von E_N M_2^* als euklidischer Punkt der nichteuklidischen Mittelsenkrechten m zu $\overline{PQ}_N$.

(iii) Wir rollen die euklidische Konstruktion der nichteuklidischen Spiegelung rückwärts auf. D.h. Thaleskreis k^* über dem euklidischen Durchmesser $\overline{QM_2^*}$.

(iv) Euklidische Lotgerade ℓ^* durch P zu QM_2^* ergibt $\{T\} = \ell^* \cap k^*$. T gehört gehört zur Spiegelungsachse m_N, die ich suche!! m_N ist der euklidische Halbkreis um M_2^* mit euklidischem Radius $r_2 = d(T, M_2^*)$

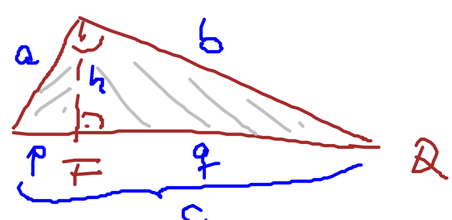
Dann ist $\{R\} = m_N \cap g_N$!!

Ü 36(a): Kathetensatz des Euklid gehört zur Satzgruppe des Pythagoras.

„Es handelt sich um Sätze in einem rechtwinkligen Dreieck

$\triangle PQR$:

Taucht bei der Kreisspiegelung auf!!



$w(\sphericalangle PRQ) = 90$, d.h. $PR \perp QR$

Sei F Lotfußpunkt des Lotes durch R auf PQ!

3 zueinander ähnliche Dreiecke: $\triangle PRF \sim \triangle PRQ \sim \triangle RQF$

Es folgen aus entsprechender Längenverhältnisse:

(1) $\boxed{p \cdot q = h^2}$ für $p = d(P,F)$, $q = d(F,Q)$, $h = d(R,F)$

Höhensatz des Euklid

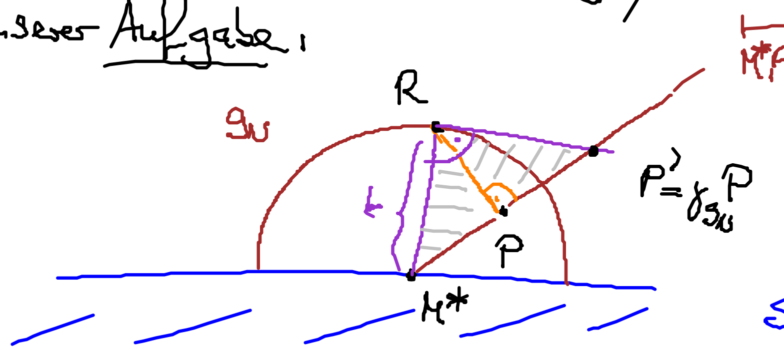
(2) $\boxed{p \cdot c = a^2, \; q \cdot c = b^2}$ für $a = d(P,R)$, $b = d(Q,R)$, $c = d(P,Q)$

Kathetensätz(e) des Euklid

(3) $\boxed{a^2 + b^2 \overset{(2)}{=} pc + qc = (\underbrace{p+q}_{=c})c = c^2}$ Satz des Pythagoras!

Ähnlichkeit bedeutet für uns: Ähnliche Dreiecke haben jeweils gleichgroße Winkel!!

In unserer Aufgabe:



Aufgrund der Konstruktion ist $P' = \gamma_{g_M} P \in \overrightarrow{M^*P}$ ✓

Das Dreieck $\triangle M^*PR$ ist so ein „Euklid"-Dreieck mit Lotfußpunkt P bzw. P'

Kathetensatz bezüglich der Kathete $\overline{M^*R}$ im Dreieck $\triangle M^*RP'$ sagt:

$$d(M^*,P) \cdot d(M^*,P') = d(M^*,R)^2 = r^2$$

ENDE der heutigen Vorlesung!!