Vorlesung vom 18.04.13.

Klausur? Evtl. Samstag, 06.07.2013 ?? oder 13.07.2013 ??

evtl. 2 Termine

Nachklausur?

· **Inzidenzgeometrie** 3 Axiome

(I) Zu jeder Geraden gehören mind. 2 Punkte

(II) Durch 2 verschiedene Punkte $P, Q \in \mathcal{E}$ geht genau eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ // Bezeichne diese Gerade (= „Verbindungsgerade") durch $g = PQ$

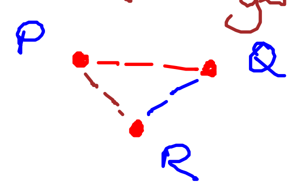
(III) Es gibt 3 Punkte in $\mathcal{E}$, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Beispiele: Frage, welche Axiome in jedem der folgenden „Modelle" erfüllt sind und welche nicht.

(a) Modell $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ mit $\boxed{\mathcal{E} = \{P, Q, R\},\ \mathcal{G} = \{g, h, k\} \text{ mit } g = \{P, Q\},\ h = \{P, R\},\ k = \{Q, R\}}$

Ebene als Punktmenge

Geradenmenge



Axiome:

(I) ✓, (II) ✓, (III) ✓

Minimalmodell einer „endlichen" Inzidenzgeometrie

(b) $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ mit $\mathcal{E}=\{P,Q,R,S,T\}$; $\mathcal{G}=\{g,h,k,l,m\}$ mit
$g=\{P,Q,T\}$; $h=\{P,R\}$; $k=\{P,S,T\}$, $l=\{Q,R,S\}$,
$m=\{R,T\}$

Axiome:

(I) ✓, (II) No!, (III) ✓ ← z.B.: P,Q,R liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden

$g\cap k=\{P,T\}$ und $g\neq k$

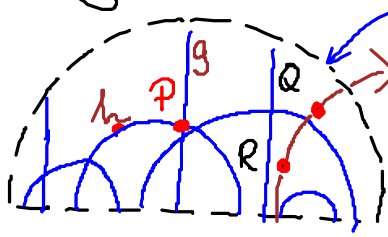
Auch möglich als Beispiel: Q,S,T

(c) Nichtendliche Geometrie $(\mathcal{E},\mathcal{G})$ mit

$\mathcal{E}$: Menge aller Punkte im Innern eines Halbkreises

$\mathcal{G}$: Menge der „Geraden", bestehend aus Halbkreisen mit Mittelpunkt auf Begrenzungssehne und dazu senkrechten Halbsehnen

Visualisierung:



Axiome:

(I) ✓ (offensichtlich, da ∞-viele Punkte „auf jeder „Geraden")

(II) No! z.B.: $Q,R\in\mathcal{E}$ wie in der Skizze haben keine Verbindungsgerade in $\mathcal{E}$!!

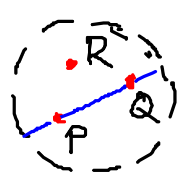
(III) ✓ z.B.: P,Q,R wie in Skizze

(d), (e): Axiome:

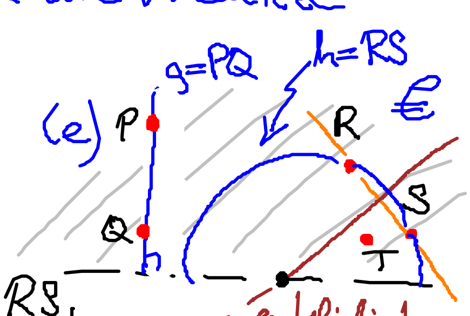
(I) ✓, (II) ✓

(III) ✓

(d)



(e)



Konstruktion von RS:

(i) Bilde euklidische Verbindungsstrecke $\overline{RS}$

(ii) euklidische Mittelsenkrechte zu $\overline{RS}$

(iii) „Schnittpunkt" von Mittelsenkrechte und Begrenzungsgerade zu $\mathcal{E}$ liefert „euklidischen" Mittelpunkt

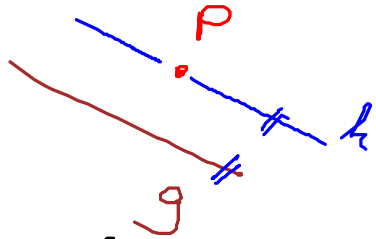
(d): Kleinsche Modell, in der das Parallelenaxiom nicht gilt.

(e): Poincaresches Halbebenenmodell!!

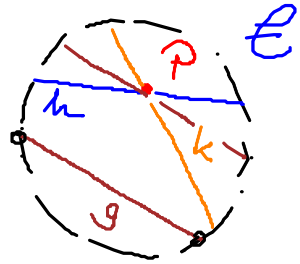
der „Geraden" (=Halbkreis) $h = RS$

Das Parallelenaxiom (PA) lautet:

Zu jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ und jedem Punkt $P \in \mathcal{E}$ mit $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade $h \in \mathcal{G}$ mit $P \in h$ und $h \cap g = \emptyset$



In den Modellen (d), (e) gilt stattdessen:



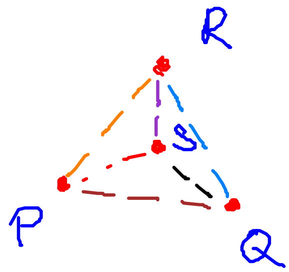
Zu $g \in \mathcal{G}$, $P \in \mathcal{E} \setminus g$ existieren „∞-viele" Geraden als Parallelen!!

2 Beispiele einer nichteuklidischen Geometrie!!

$h \cap g = \emptyset$, $k \cap g = \emptyset$, $h \neq k$, $P \in h \cap k$

$P \in h \cap k \cap l$, aber $h \cap g = k \cap g = l \cap g = \emptyset$

(f)



Beschreibung dieses endlichen Modells $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$:

$\mathcal{E} = \{P, Q, R, S\}$, $\mathcal{G} = \{\{P,Q\}, \{P,R\}, \{P,S\}, \{Q,R\}, \{Q,S\}, \{R,S\}\}$

enthält alle 2-punktigen Teilmengen von $\mathcal{E}$, also $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Geraden!

In diesem Modell gilt (PA) (= Parallelenaxiom), denn

z.B. $g = \{P,Q\}$, $S \notin g$ $\Rightarrow$ $h = \{R,S\} \in \mathcal{G}$ ist eindeutige Parallele zu g durch S: $S \in h$, $h \cap g = \emptyset$.

<u>Satz</u> 1.2: Jede Inzidenzgeometrie enthält mindestens 3 verschiedene Geraden.

Beweis: Axiom (III) garantiert Existenz $P, Q, R \in \mathcal{E}$, nicht auf einer Geraden liegend, (II) garantiert Existenz und Eindeutigkeit von $g = PQ$, $h = PR$, $k = QR$.

$g \neq h \neq k \neq g$, da sonst P, Q, R sonst auf einer Geraden (z.B.: $g = h$ o.ä.). ∎

Ende der Vorlesung!